KĄCIK POCZĄTKUJĄCEGO OLIMPIJCZYKA 14

Kochajcie trygonometrię, dziewczęta

Bartłomiej BZDĘGA

Trygonometria, z zupełnie niezrozumiałych dla mnie powodów, bywa uznawana za brzydką metodę rozwiązywania zadań olimpijskich. Niestety skutkuje to tym, że młodzież mniej chętnie uczy się tego ważnego działu matematyki. Być może znalezienie odcinka, którego dorysowanie natychmiast rozwiązuje problem, jest nieco bardziej eleganckie niż stosowanie twierdzenia sinusów, ale nie ma gwarancji, że taki odcinek zdążymy w czasie zawodów znaleźć. Dlatego warto w swym arsenale mieć dodatkowe narzędzia, które, choć bardziej toporne, w niektórych warunkach są nieco pewniejsze.

W poniższych twierdzeniach używamy *standardowych oznaczeń*: niech α, β, γ będą miarami kątów przy wierzchołkach odpowiednio A, B, C trójkąta ABC, zaś a, b, c – długościami boków naprzeciw nich. Przez R oznaczamy promień okręgu opisanego na tym trójkącie.

Twierdzenie sinusów: $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$.

Twierdzenie cosinusów: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$ (analogicznie a^2 i b^2).

Pole trójkąta: $[ABC] = \frac{1}{2}ab\sin\gamma = \frac{1}{2}bc\sin\alpha = \frac{1}{2}ca\sin\beta$.

Nie będziemy wymieniać tu wzorów redukcyjnych ani innych tożsamości trygonometrycznych. Czytelnik, jeżeli jeszcze nie zapoznał się z nimi na lekcji matematyki w szkole średniej, znajdzie je w tablicach matematycznych.

Na koniec dwie uwagi do twierdzenia sinusów. Wynika z niego równość proporcji $\frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$ (i dwie analogiczne), więc możemy płynnie przechodzić pomiędzy długościami boków i sinusami kątów trójkąta. Ponadto do korzystania z twierdzenia sinusów wcale nam trójkąta nie potrzeba, gdyż łączy ono długość d cięciwy okręgu, która wyznacza kąt wpisany δ, z promieniem R tego okręgu: $\frac{d}{\sin\delta} = 2R$.

Zadania

1. Wykazać, że dla równoległoboku $ABCD$ zachodzi równość
$$|AB|^2 + |BC|^2 + |CD|^2 + |DA|^2 = |AC|^2 + |BD|^2.$$
2. Punkt P leży na boku AB trójkąta ABC. Niech $|BC| = a$, $|CA| = b$, $|AP| = x$ i $|BP| = y$. Dowieść, że $|CP|^2 = \frac{a^2x+b^2y}{x+y} - xy$ (twierdzenie Stewarta).
3. Ustalmy półproste p_a, p_b, p_c i p_d, mające wspólny początek P, które zostały podane w kolejności antyzegarowej. Prosta ℓ przecina je odpowiednio w punktach A, B, C i D. Dowieść, że wartość wyrażenia $\frac{|AC|\cdot|BD|}{|BC|\cdot|AD|}$ nie zależy od wyboru prostej ℓ (niezmienniczość dwustosunku).
4. Dany jest prostokąt $ABCD$. Punkty K i L leżą odpowiednio na odcinkach BC i CD, przy czym trójkąt AKL jest równoboczny. Dowieść, że suma pól trójkątów ABK i ALD jest równa polu trójkąta CLK.
5. Czworokąt $ABCD$ wpisany jest w okrąg. Na tym okręgu leży punkt P. Udowodnić, że iloczyn odległości punktu P od prostych AB i CD jest równy iloczynowi odległości punktu P od prostych BC i DA.
6. Punkty P, Q, R leżą odpowiednio na bokach BC, CA, AB trójkąta ABC. Spełnione są następujące równości:
$$|AR| = |RP| = |PC|, \qquad |BR| = |RQ| = |QC|.$$
Wykazać, że $|AC| + |BC| = 2|AB|$.
7. W pięciokącie wypukłym $ABCDE$ zachodzą następujące równości:
$$|AB| = |BC| = |CD|, \qquad |AE| = |EB| = |BD|, \qquad |AC| = |CE| = |ED|.$$
Wyznaczyć miary kątów tego pięciokąta.
8. W trójkącie ABC, wpisanym w okrąg o środku O, kąt przy wierzchołku C jest rozwarty oraz zachodzi równość $|AC| + |BC| = 2|CO|$. Odcinki AB i CO przecinają się w punkcie D. Dwusieczne kątów ACD i BCD przecinają odcinek AB w punktach odpowiednio P i Q. Dowieść, że punkt D jest środkiem odcinka PQ.

Wskazówki do zadań

1. Niech P będzie punktem przecięcia przekątnych równoległoboku. Wyznaczyć $|AB|^2$ z twierdzenia cosinusów dla trójkąta ABP, podobnie trzy pozostałe kwadraty długości boków.
2. Mamy $\cos\sphericalangle APC = -\cos\sphericalangle BPC$. Wyznaczyć lewą i prawą stronę z twierdzenia cosinusów dla trójkątów odpowiednio APC i BPC, a następnie przekształcić otrzymaną równość, by otrzymać $|CP|^2$.
3. Niech h będzie odległością punktu P od prostej ℓ. Oznaczmy przez α, β, γ kąty pomiędzy półprostymi odpowiednio p_a i p_b, p_b i p_c, p_c i p_d. Wówczas obliczając na dwa sposoby pole trójkąta ACP, otrzymamy $|AC| = \frac{|AP|\cdot|CP|}{h}\cdot\sin(\alpha+\beta)$. Analogicznie należy postąpić z odcinkami BD, BC i AD.
4. Przy standardowych oznaczeniach, jeśli $\gamma = 90^\circ$, to $[ABC] = \frac{1}{4}c^2\sin 2\alpha$. Niech $\varphi = 2|\sphericalangle BAK|$. Zadanie sprowadza się do wykazania równości $\sin\varphi + \sin(60^\circ - \varphi) = \sin(60^\circ + \varphi)$.
5. Przy standardowych oznaczeniach wysokość trójkąta ABC opuszczona z wierzchołka C ma długość $\frac{ab}{2R}$. Odległości punktu P od prostych AB, BC, CD i DA są odpowiednio wysokościami trójkątów ABP, BCP, CDP, DAP.
6. Niech $|AR| = x$ i $|BR| = y$. Obliczając pole trójkąta ABC na dwa sposoby, otrzymamy równość $\frac{1}{2}ab\sin\gamma = xy\sin\gamma + \frac{1}{2}x(b-y)\sin\alpha + \frac{1}{2}y(a-x)\sin\beta$ (oznaczenia standardowe). Teraz wystarczy zastosować twierdzenie sinusów dla trójkąta ABC i uprościć tę równość.
7. Przyjmijmy oznaczenia $x = |AB|$, $y = |AE|$, $z = |AC|$ oraz $\varphi = |\sphericalangle BAC|$, $\psi = |\sphericalangle CAE|$. Z równości $\cos(\phi+\psi) = \cos\phi\cos\psi - \sin\phi\sin\psi$ otrzymamy po przekształceniach $\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{z^2} + \frac{z^2}{x^2} = 5$, analogicznie $\frac{x^2}{z^2} + \frac{z^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} = 5$. Te równości prowadzą do wniosku, że pewne dwie z liczb x, y, z są równe, a dzięki założeniu o wypukłości pięciokąta mamy $y = z$. Dalszą część rozwiązania stanowią proste rachunki na kątach.
8. Przyjmijmy standardowe oznaczenia dla trójkąta ABC. Z twierdzenia o dwusiecznej zastosowanego dla trójkąta ADC otrzymujemy $\frac{|CD|}{|DP|} = \frac{|AC|+|CD|}{|AD|}$. Miary kątów trójkąta ADC wynoszą odpowiednio α, $90^\circ - \alpha + \beta$, $90^\circ - \beta$, więc z twierdzenia sinusów $\frac{|AC|+|CD|}{|AD|} = \frac{\sin(90^\circ-\alpha+\beta)+\sin\alpha}{\sin(90^\circ-\beta)}$. Po uproszczeniu i zastosowaniu równości $\sin\alpha + \sin\beta = 1$ (treść zadania + twierdzenie sinusów), otrzymamy $\frac{|CD|}{|DP|} = \cos\alpha + \cos\beta$. Analogicznie postępując, dojdziemy do równości $\frac{|CD|}{|DQ|} = \cos\alpha + \cos\beta$.