Jeżeli $f(B) \subset S$, to również $f(B \cup S) \subset S$ ($f(S)$ nie może wtedy zawierać się w zbiorze $B$, bo $f$ jest ciągłe). Ponieważ zbiór $B \cup S$ jest zwarty, więc zbiór $f(B \cup S) \subset S$ jest punktem albo domkniętym łukiem skończonej długości $J \subset S$. Jeżeli $f(B \cup S)$ jest punktem, to jest to punkt stały przekształcenia $f$. W przeciwnym przypadku $f : J \to J$, a to przekształcenie ma punkt stały. Zatem continuum $B \cup S$ ma własność punktu stałego.

Opisane zagadnienia prowadzą do wielu otwartych pytań. Jedno z najważniejszych, postawione około 1930 r., jest następujące:

**Problem.** *Czy każde continuum, które nie rozcina płaszczyzny, ma własność punktu stałego?*

Niestety, nie znamy na nie odpowiedzi. Jednym z powodów takiego stanu rzeczy jest niezwykle bogaty i różnorodny ogród anomalii jaki stanowią continua. Przykładem niech będzie pytanie: czy na płaszczyźnie istnieją linie będące wspólnym brzegiem trzech (lub więcej) obszarów? Odpowiedź podał Brouwer w 1910 roku, budując na płaszczyźnie dla każdego naturalnego $n \geqslant 3$ wspólne brzegi $n$ obszarów. Spróbuj i Ty!

O egzotycznych kontinuach pisał w $\Delta^3_{81}$ Jerzy Mioduszewski: *Z geometrii głębokiego interioru: kontinua nierozkładalne.*

# Anomalie kul i kostek

*Karol GRYSZKA**

* Uniwersytet Pedagogiczny w Krakowie

Kwadrat i koło mają swoje naturalne odpowiedniki trójwymiarowe (sześcian i kula), czterowymiarowe, pięciowymiarowe i dowolnie wymiarowe. Pisząc „dowolny wymiar", mamy na myśli więcej osi układu, czyli też współrzędnych opisujących obiekt. Wyobraźmy sobie mianowicie przestrzeń trójwymiarową (co nie jest specjalnie trudne). Każdy punkt takiej przestrzeni można opisać za pomocą zestawu trzech współrzędnych $(x, y, z)$. Gdy opisujemy położenie punktu na płaszczyźnie, myślimy zwykle o układzie kartezjańskim i parze współrzędnych $(x, y)$. Opisując punkt na prostej, używamy tylko jednej liczby. Gdy zaś chcemy opisać przestrzeń czterowymiarową, lub ogólniej $n$-wymiarową, używamy zestawu $n$ liczb $(x_1, \ldots, x_n)$.

Potrzeba używania więcej niż trzech współrzędnych nie jest specjalnie wydumana. Wyobraźmy sobie, że chcemy opisać temperaturę w pomieszczeniu. Chcąc być absolutnie precyzyjnym, powinniśmy wskazać, jaka temperatura panuje w każdym jego punkcie (inna będzie nad kaloryferem, a inna w rogu pokoju). Czyli mamy $(x_1, x_2, x_3, T)$, gdzie pierwsze trzy liczby to współrzędne punktu, a czwarta to temperatura. Chcąc opisać temperaturę w pomieszczeniu w ciągu np. tygodnia, posłużymy się pięcioma współrzędnymi $(x_1, x_2, x_3, T, t)$, gdzie ostatnia wskazuje czas dokonywania pomiaru temperatury.

I choć opis takich wielowymiarowych przestrzeni nie sprawia żadnej trudności od strony formalnej, to nie można „zobaczyć" przestrzeni czterowymiarowej (i żadnej wyżej wymiarowej), gdyż nie mają one naturalnego odpowiednika.

Stosunkowo łatwo jest skonstruować odpowiednie rzuty obiektów czterowymiarowych w przestrzeń trójwymiarową. Analogią takiej idei jest rysowanie rzutu sześcianu na płaskiej kartce papieru.

Wróćmy na chwilę do niższych wymiarów – drugiego i trzeciego. Wspomniane na początku koło i kula są właściwie tym samym, tylko w różnych przestrzeniach: są to zbiory wszystkich punktów przestrzeni, których odległość od ustalonego środka jest nie większa od promienia $R$. Takie pojęcie możemy przenieść na dowolny wymiar. *Kulą n-wymiarową o środku w punkcie* $a = (a_1, \ldots, a_n)$ *i promieniu* $R$ nazywamy zbiór

$$B^n(a, R) = \{x = (x_1, \ldots, x_n) \mid d(x, a) \leqslant R\},$$

gdzie $d(x, a)$ to odległość od $a$ do $x$. Z kulą wiążemy w sposób naturalny *sferę*, która jest zbiorem punktów odległych od danego punktu dokładnie o $R$

$$S^{n-1}(a, R) = \{x = (x_1, \ldots, x_n) \mid d(x, a) = R\}.$$

Zwróćmy uwagę na wskaźnik $n-1$; mimo iż sfera jest opisana w przestrzeni $n$-wymiarowej, jest obiektem $n-1$ wymiarowym – jedna ze współrzędnych zawsze daje się wyrazić jako funkcja promienia i pozostałych $n-1$ współrzędnych.

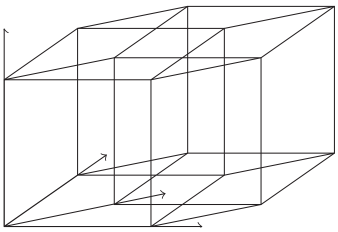
Odległość punktu $x = (x_1, \ldots, x_n)$ od $y = (y_1, \ldots, y_n)$ w przestrzeni $n$-wymiarowej to liczba

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (x_k - y_k)^2}.$$

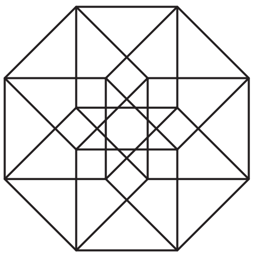
Wzór ten jest konsekwencją twierdzenia Pitagorasa.

Jeśli okrąg opisany jest równaniem $x^2 + y^2 = 1$, to znając $x$, wiemy, że $y = \sqrt{1 - x^2}$ lub $y = -\sqrt{1 - x^2}$.

Można zastanowić się przez chwilę, ilu współrzędnych używamy do opisania położenia na Ziemi – oczywiście, wystarczą dwie: długość i szerokość geograficzna. I to mimo że powierzchnia naszej planety jest umieszczona w przestrzeni trójwymiarowej, więc naturalne jest myślenie o niej jak o obiekcie trójwymiarowym.



Tesserakt inaczej nazywany jest hipersześcianem. Na rysunku poniżej przedstawiony tak, aby zobrazować jego idealną symetrię.



Poniżej przedstawiamy jedną z wielu możliwości zdefiniowania kwadratu czy kostki w dowolnym wymiarze. *Kostką n-wymiarową o boku długości* 1 nazywamy zbiór

$$C^n = \{(x_1, \ldots, x_n) \mid x_k \in [0, 1] \text{ dla } k = 1, \ldots, n\}.$$

Powyższe opisuje kostkę, która ma wszystkie „ściany” równoległe do osi układu współrzędnych i której jeden z „rogów” znajduje się w jego środku. Chcąc opisać przesunięcie takiej kostki o ustalony wektor, trzeba by, oczywiście, lekko zmodyfikować wzór. Trochę trudniej jest opisać kostkę obróconą, ale tego na szczęście nie będziemy w dalszej części potrzebowali.

Oczywiście, $C^2$ to klasyczny kwadrat, a $C^3$ to sześcian. Kostkę $C^4$ nazywamy *tesseraktem* – jest to czterowymiarowy odpowiednik sześcianu (więcej o nim w *Małej Delcie*).

Zastanówmy się teraz, jak interpretować pole i objętość w dowolnym wymiarze. Posłużymy się w tym celu analogią do kostek, które dobrze znamy. Objętością obiektu jednowymiarowego jest jego długość. Dwuwymiarowego – pole, a trójwymiarowego – klasyczna objętość. Tym samym objętość kostki 1-wymiarowej o boku długości $R$ jest równa $R$, 2-wymiarowej to $R^2$, 3-wymiarowej to $R^3$ i przez analogię $n$-wymiarowej $R^n$.

Powierzchni boczna $n$-wymiarowej bryły daje się przedstawić w przestrzeni o wymiar niższej niż sama bryła. W końcu siatkę 3-wymiarowej kostki możemy przedstawić na płaszczyźnie, a „siatkę” 2-wymiarowej kostki na prostej (będą to cztery odcinki). Ponownie przez analogię pole powierzchni bocznej $n$-wymiarowej bryły można interpretować jako objętość jej brzegu ($n - 1$-wymiarowego).

Polem sześcianu (obiekt trójwymiarowy) jest objętość brzegu sześcianu, czyli objętość sześciu kwadratów. Kwadrat jest obiektem dwuwymiarowym, więc objętość w tym przypadku interpretujemy jako klasycznie rozumiane pole. Dla kwadratu jego „polem” nie jest $R^2$ (klasyczne pole), lecz objętość brzegu tego kwadratu, a więc w tym przypadku długość czterech odcinków brzegowych (klasyczny obwód).

Przyjrzyjmy się teraz wielkości pola i objętości kostek i kul jednostkowych (o boku lub promieniu $R$)

| | objętość | pole |
|---|---|---|
| kostka $n$-wymiarowa $C^n$ | $R^n$ | $2nR^{n-1}$ |
| kula $n$-wymiarowa $B^n$ | $V_n(R)$ | $S_{n-1}(R)$ |

gdzie wzory dla kuli są zdefiniowane rekurencyjnie (wszystko przez analogię do kul jedno-, dwu- i trójwymiarowych),

$$V_0(R) = 1, \quad V_{n+1}(R) = \frac{S_n(R) \cdot R}{n+1}, \qquad S_0(R) = 2, \quad S_{n+1}(R) = 2\pi V_n(R) \cdot R.$$

Krótkiego wyjaśnienia wymaga $V_0(R) = 1$ oraz $S_0(R) = 2$. Pierwszy zbiór składa się z jednego punktu, drugi zaś z dwóch. Objętość w przestrzeni „zerowymiarowej” zlicza punkty należące do danego zbioru.

Korzystając z powyższych wzorów, można podać wzory jawne dla pól i objętości kuli $n$-wymiarowej. Poniżej podajemy te dla $V_n(R)$, Czytelnikowi pozostawiając wyprowadzenie odpowiednich wzorów dla sfer

$$V_{2k}(R) = \frac{\pi^k \cdot R^{2k}}{k!}, \qquad V_{2k+1}(R) = \frac{2^{k+1}\pi^k \cdot R^{2k+1}}{(2k+1)!!}.$$

$$n!! = \begin{cases} 1, & n = 0, 1, \\ n \cdot (n-2)!!, & n \geqslant 2. \end{cases}$$

Można wykazać, że

$$V_n \sim \frac{1}{\sqrt{n\pi}} \left(\frac{2\pi e}{n}\right)^{\frac{n}{2}} R^{\frac{n}{2}}.$$

Asymptotyka ta wynika ze wzoru Stirlinga

$$n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}.$$

## Anomalie

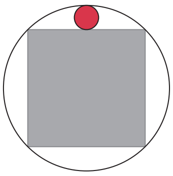
**1.** W kostkę $C^n$ o boku długości 1 wpisujemy kulę $B^n$. Jak będzie się zmieniał stosunek objętości kuli do kostki, gdy wymiar $n$ będzie rosnąć? Otóż odpowiednia proporcja dąży do… zera! Podobne zjawisko ma miejsce, gdy w kulę wpiszemy kostkę (patrz punkt **4**). W obu przypadkach można to rozumieć w ten sposób, że wpisywane bryły coraz „gorzej” wypełniają to, w co są wpisywane.

Długość $d_n$ można obliczyć tak:

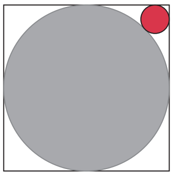
$$d_n = d(\mathbf{0}, \mathbf{1}),$$

gdzie $\mathbf{0} = (0, \ldots, 0)$ oraz $\mathbf{1} = (1, \ldots, 1)$ mają po $n$ identycznych współrzędnych.

**2.** Obliczmy długość przekątnej $d_n$ $n$-wymiarowej kostki $C^n$ o boku długości 1. Znamy dobrze przypadek $d_2 = \sqrt{2}$ oraz $d_3 = \sqrt{3}$. Nietrudno przekonać się, że $d_n = \sqrt{n}$. Tym samym przekątna kostki o boku 1 może przyjmować dowolnie dużą



wartość (!) – tj. rośnie nieograniczenie wraz ze wzrostem wymiaru. Ponadto, promień kuli opisanej na tej kostce, równy połowie długości przekątnej, również rośnie bez ograniczenia. I wreszcie – maksymalna luka między powierzchnią kuli opisanej na kostce i tą kostką, wynosi $\frac{\sqrt{n}-1}{2}$, i również może przyjąć dowolnie dużą wartość. Tym samym można w lukę między kostką i powierzchnią kuli wpisać kulę o średnicy $\frac{\sqrt{n}-1}{2}$. W wymiarze $n = 10201$ odpowiednia kula będzie miała średnicę 50 razy większą od długości boku kostki.

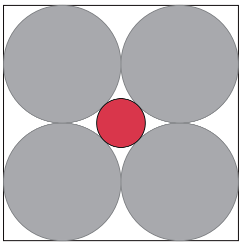


**3.** Punkty 1. oraz 2. wskazują, że wraz ze wzrostem wymiaru rośnie ilość przestrzeni między bryłami. Rozważmy tym razem sytuację analogiczną do przedstawionej na rysunku obok, tyle że $n$-wymiarową. Niech $r$ będzie szukanym promieniem małej kuli. Wtedy

$$r = \frac{\sqrt{n}-1}{2+2\sqrt{n}}.$$

Granicą powyższego wyrażenia jest $\frac{1}{2}$. Oznacza to, że średnica opisanej przed chwilą kuli będzie coraz lepiej wypełniała przestrzeń w jednej z $2^n$ identycznych kostek, na jakie wyjściową kostkę daje się podzielić (średnica będzie coraz bliższa długości boku takiej kostki).

**4.** Coś prostszego: z punktu 2. wynika, że kostka jest coraz mniejsza w stosunku do kuli, w którą jest wpisana. Istotnie, jeżeli kula $n$-wymiarowa o promieniu 1 jest opisana na kostce, to bok takiej kostki ma długość $\frac{2}{\sqrt{n}}$. Tym samym objętość takiej kostki maleje wraz ze wzrostem wymiaru i może być dowolnie bliska zeru.



**5.** Jeśli w $n$-wymiarową kostkę o boku 1 wpiszemy $2^n$ kul o średnicach $\frac{1}{2}$, to kula styczna do wszystkich kul będzie miała promień równy $\frac{\sqrt{n}-1}{4}$. I tak, na przykład, w wymiarze $n = 9$ kula będzie jednocześnie kulą wpisaną w kostkę i styczną do 512 narożnych kul (!), a w wymiarach od 10 wzwyż taka kula będzie „wystawała” poza kostkę (wszystkie rogi kostki są zawsze na zewnątrz kuli)! Ponadto, jej promień może być dowolnie duży (wystarczy dobrać odpowiednie $n$), ale jest jednocześnie od góry ograniczona przez połowę długości przekątnej kostki $\frac{\sqrt{n}}{2}$. Tym samym powierzchnia takiej kuli nigdy nie „wyjdzie” całkowicie poza kostkę! A w takim razie to ta część „wystająca” poza kostkę ma objętość rosnącą do $+\infty$. Czy ktoś potrafi to sobie wyobrazić?

## Anomalia dla bardziej zaawansowanych

**6.** Na koniec rzecz niezwykła. Gdy spojrzymy na pole koła i potraktujemy to wyrażenie jako funkcję zmiennej $R$, to

$$\frac{d}{dR}\left(\pi R^2\right) = 2\pi R,$$

a więc pochodną pola koła jest obwód okręgu (długość brzegu koła). Podobne zjawisko ma miejsce dla objętości kuli i pola sfery (pola brzegu kuli)

$$\frac{d}{dR}\left(\frac{4}{3}\pi R^3\right) = 4\pi R^2.$$

Czy to przypadek, czy reguła? Otóż jest to zależność prawdziwa w dowolnym wymiarze! Liczby $V_n$ oraz $S_n$ łączy następujący związek

$$\frac{d}{dR}V_{n+1}(R) = S_n(R).$$

Nie jesteśmy w stanie wyobrazić sobie większości (lub wszystkich) z powyższych punktów. Intuicja wielowymiarowa całkowicie nas zawodzi i nie jest możliwe racjonalne przekonanie kogoś, że kula opisana w punkcie 5. może „wystawać” poza sześcian. Przeczy to całkowicie zdrowemu rozsądkowi, ale… Pamiętajmy, że w matematyce nie wszystko jest intuicyjne i zgodne z oczekiwaniami. Powyższe przykłady pokazują, jak ostrożnym należy być. Czytelników wiernych zasadzie „nie uwierzę, póki nie zobaczę” prosimy o wybaczenie. I o więcej ufności w rozumowania czysto analityczne.