Niemożliwe wycinanki

Joanna JASZUŃSKA

1. Czy można wyciąć w kartce dziurę w kształcie monety 1 gr, a następnie przełożyć przez tę dziurę monetę 1 zł?

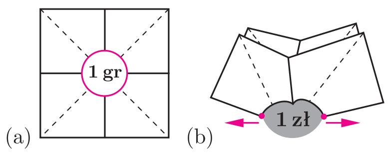
2. Mamy kartkę o wymiarach 10 cm × 10 cm i nożyczki. Czy można wyciąć taką dziurę, przez którą przejdzie człowiek?

3. Czy w sześcianie o krawędzi 20 zmieści się kwadrat o boku 21?

4. Czy w sześcianie o krawędzi 20 można wywiercić tunel, przez który da się przesunąć sześcian o krawędzi 21?

Rozwiązania

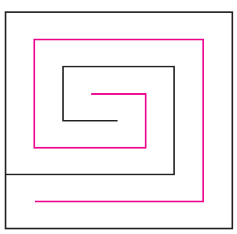
Wszystkie odpowiedzi są pozytywne. Oto przepisy, jak te wycinanki zrealizować.



Rys. 1. Wzdłuż linii ciągłych zginamy w jedną stronę, wzdłuż przerywanych – w drugą.

R1. Po wycięciu dziury warto utworzyć cztery pomocnicze zagięcia (rys. 1(a)). Następnie kartkę złożyć w pół wzdłuż jednego z nich i odciągnąć od siebie końce dziury (rys. 1(b)), uzyskując dłuższy, wąski otwór. □

R2. Kartkę można np. najpierw rozciąć wzdłuż spiralnej linii, uzyskując bardzo długi, poskręcany pasek (rys. 2), a następnie naciąć wzdłuż prawie całej długości tego paska, otrzymując w nim wystarczająco dużą dziurę. □

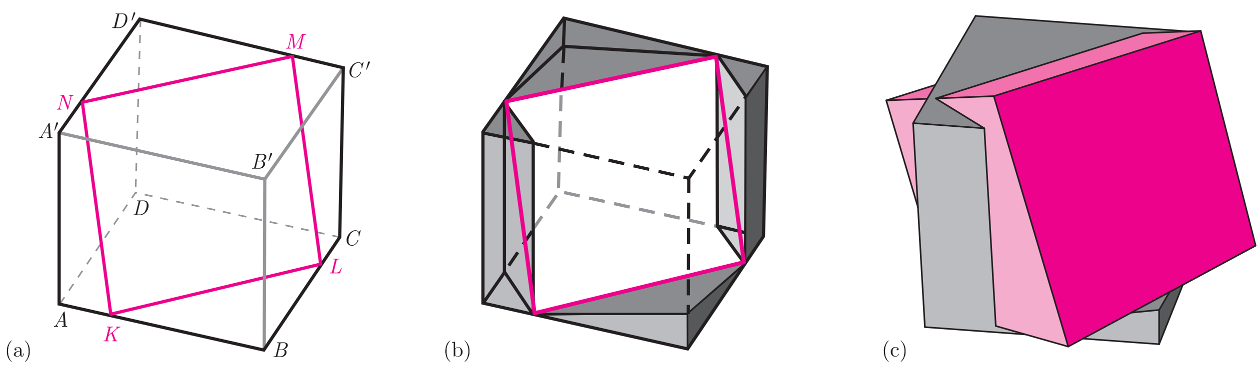


Rys. 2. Uproszczony schemat, należy wycinać gęstszą spiralę.

R3. Niech punkty K, L, M, N leżą na krawędziach AB, BC, $C'D'$, $D'A'$ sześcianu $ABCDA'B'C'D'$ tak, że $AK/AB = CL/CB = C'M/C'D' =$ $= A'N/A'D' = 1/4$ (rys. 3(a)). Wówczas $KL = 3/4 \cdot AC = 3/4 \cdot 20\sqrt{2} = 15\sqrt{2}$, podobnie $MN = KL$ i odcinki te są równoległe, więc punkty K, L, M, N leżą w jednej płaszczyźnie, a wobec symetrii problemu równoległobok $KLMN$ jest prostokątem.

Korzystając dwukrotnie z twierdzenia Pitagorasa (kolejno dla trójkątów $AA'N$ oraz AKN) obliczamy, iż również $KN = 15\sqrt{2}$, zatem $KLMN$ jest kwadratem o boku długości $15\sqrt{2} > 15 \cdot 1,4 = 21$.

Jeśli każdy z jego wierzchołków przybliżymy do jego środka o taką samą odpowiednio małą odległość, uzyskamy w rezultacie kwadrat $K'L'M'N'$ o krawędzi 21, którego wierzchołki leżą wewnątrz danego sześcianu. □



Rys. 3 (a) Kwadrat o boku > 21 (b) Tunel o przekroju $KLMN$ (c) Kolorowy sześcian przesuwany przez tunel w szarym sześcianie

R4. Wywiercmy tunel, którego przekrojem poprzecznym jest kwadrat $K'L'M'N'$ z poprzedniego zadania (wygląda to prawie jak na rys. 3(b)). Zauważmy, że tunel ten nie ma punktów wspólnych z żadną z krawędzi sześcianu składających się na łamaną zamkniętą $ABCC'D'A'A$ (zaznaczoną na czarno na rys. 3(a)), istotnie więc część sześcianu pozostająca wokół tunelu nie rozpada się i tworzy wielościenną obręcz, przez którą da się przesunąć sześcian o krawędzi 21 (rys. 3(c)). □

Tunel o przekroju $KLMN$ pozwala przesunąć przez dany sześcian największy możliwy inny sześcian (o krawędzi o około 6% większej), nazywany *sześcianem księcia Ruperta*. Polecam animację na stronie `https://www.youtube.com/watch?v=-2jjgHsxEu4`