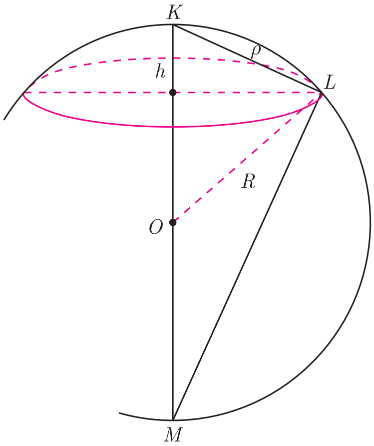


Rys. 1

Jak krzywizna zżera przestrzeń

Cytat z *General Relativity* Johna Archibalda Wheelera, który został umieszczony u góry marginesu artykułu Michała Bejgera, można przejrzyście zilustrować geometrycznie, gdy zajmiemy się przestrzenią dwuwymiarową.

Jak wiadomo, pole czaszy sferycznej to $2\pi Rh$, gdzie R to promień sfery, a h to wysokość czaszy. Skorzystanie ze „szkolnego” twierdzenia, że przyprostokątna w trójkącie prostokątnym jest średnią geometryczną przeciwprostokątnej i swojego rzutu na nią, pozwala na spostrzeżenie, że również na sferze pole koła dane jest wzorem πr^2 – trzeba tylko pamiętać, że owo r to *przestrzenna* odległość środka koła od brzegu, aby nie było nieporozumień, oznaczmy ją przez ρ (rys. 1). Faktycznie $2\pi Rh = \pi(2R)h = \pi\rho^2$.

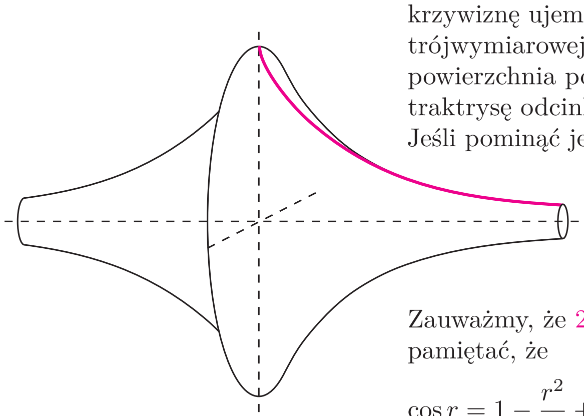
Dla mieszkańców sfery taki promień nie ma sensu. Dla nich promieniem koła na sferze jest łuk KL, oznaczmy jego długość przez r, czyli jest to kąt KOL pomnożony przez R. Ponieważ $\sphericalangle KOL = 2\sphericalangle KML$ i $\rho = 2R\sin\sphericalangle KML$, więc

$$\rho^2 = 4R^2\sin^2\sphericalangle KML = 2R^2(1-\cos\sphericalangle KOL) = 2\left(1-\cos\frac{r}{R}\right)R^2,$$

zatem pole koła na sferze to $2\pi\left(1-\cos\frac{r}{R}\right)R^2$.

W szczególności pole koła o promieniu r na sferze jednostkowej to $2\pi(1-\cos r)$.

Wracając do Wheelera, musimy rozważać nie tylko powierzchnie mające stałą krzywiznę dodatnią (jak sfera – jej krzywizna to $1/R^2$), ale i te, które mają krzywiznę ujemną. Przyzwoitych „sfer” o stałej ujemnej krzywiźnie w przestrzeni trójwymiarowej nie ma. Ich najbliższą krewną jest *pseudosfera* (rys. 2), powierzchnia powstała z obrotu traktrysy (rys. 3). Długość wyznaczającego traktrysę odcinka (oznaczmy ją przez R) nazywamy promieniem pseudosfery. Jeśli pominąć jej „kant”, to pseudosfera ma wszędzie krzywiznę równą $-1/R^2$.



Rys. 2

Rozumowanie analogiczne do przeprowadzonego dla sfery (choć już, niestety, bez „szkolnego” wsparcia) pozwala stwierdzić, że pole koła o promieniu r na pseudosferze jednostkowej to $2\pi(\cosh r - 1)$.

Zauważmy, że $2\pi(1-\cos r) \leqslant \pi r^2 \leqslant 2\pi(\cosh r - 1)$. W tym celu należy tylko pamiętać, że

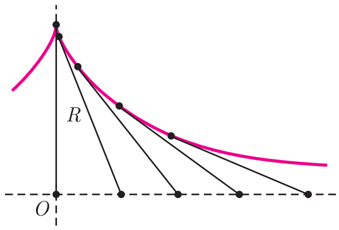
$$\cos r = 1 - \frac{r^2}{2!} + \frac{r^4}{4!} - \frac{r^6}{6!} + \frac{r^8}{8!} - \ldots \quad \text{i} \quad \cosh r = 1 + \frac{r^2}{2!} + \frac{r^4}{4!} + \frac{r^6}{6!} + \frac{r^8}{8!} + \ldots$$

Mamy więc dla $r > 0$

$$2\pi\left(1-\left(1-\frac{r^2}{2!}+\frac{r^4}{4!}-\frac{r^6}{6!}+\frac{r^8}{8!}-\ldots\right)\right) = \pi\left(r^2 - \frac{2r^4}{4!} + \frac{2r^6}{6!} - \frac{2r^8}{8!} + \ldots\right) < \pi r^2$$

oraz

$$2\pi\left(\left(1+\frac{r^2}{2!}+\frac{r^4}{4!}+\frac{r^6}{6!}+\frac{r^8}{8!}+\ldots\right)-1\right) = \pi\left(r^2 + \frac{2r^4}{4!} + \frac{2r^6}{6!} + \frac{2r^8}{8!} + \ldots\right) > \pi r^2.$$



Rys. 3. Traktrysa to krzywa, której odcinek stycznej od punktu styczności do poziomej osi ma stałą długość. Można ją praktycznie zrealizować, wędrując po prostym krawężniku i ciągnąc za sobą na sznurku zabawkę. Dla koneserów: traktrysa jest jedną z ewolwent krzywej łańcuchowej.

Zatem koła na powierzchni o krzywiźnie dodatniej mają mniejsze pole od kół o tym samym promieniu na płaszczyźnie, a koła na powierzchni o krzywiźnie ujemnej – pola większe. Można to interpretować tak, że krzywizna dodatnia zżera powierzchnię, przyciągając do siebie wszystko, a krzywizna ujemna rozpycha powierzchnię, wszystko od siebie odsuwając. Fizycy lubią te oddziaływania nazywać grawitacją.

I na koniec bardzo praktyczne spostrzeżenie krawieckie. Typowa spódnica, gdy jej „nosicielka” obraca się szybko w tańcu, przybiera kształt zbliżony do czaszy. Ale gdy jest uszyta z pełnego klosza, przy szybkich obrotach ułoży się płasko na poziomie talii. Gdy wreszcie wszyjemy w nią jeszcze więcej klinów (tak się często szyje spódnice dla zespołów folklorystycznych), przy obrotach będzie falowała, a jej brzeg będzie naśladował sinusoidę. Przykład, co to znaczy za mało – a co za dużo materiału, jest trafiony, ale chyba z tym przyciąganiem to – w przypadku spódnic – jest nie całkiem tak, jak chciałby Wheeler.

Marek KORDOS