*studentki, Wydział Matematyki i Informatyki, Uniwersytet Jagielloński

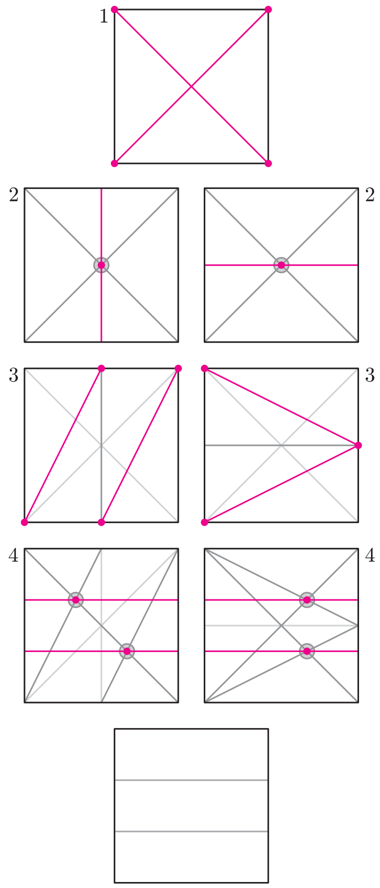
Tam, gdzie matematyka, sztuka i magia łączą swoje siły, czyli słów kilka o origami

*Barbara CIESIELSKA**, *Agnieszka KOWALCZYK**

Mówi się, że origami powstało dwa tysiące lat temu wraz z wynalezieniem papieru. W tym kontekście wydaje się zaskakujące, że początek odkrywania matematyki stojącej za składaniem papieru przypada dopiero na lata osiemdziesiąte zeszłego stulecia. Dziś gałąź nauki zwana origami obliczeniowe (ang. *computational origami*) rozwija się bardzo prężnie.

Origamiści-teoretycy zadają sobie głównie dwa pytania: co da się złożyć ze z góry zadanego wzoru złożeń (tzw. *foldability question*) oraz jakie kształty można zaprojektować (tzw. *design question*). Bardzo często odpowiedzi udzielają – jeśli to tylko możliwe – komputery. Origami obliczeniowe w głównej mierze rozwija się dzięki algorytmom, z których niektóre zostały zaimplementowane w programach dostępnych bezpłatnie online.

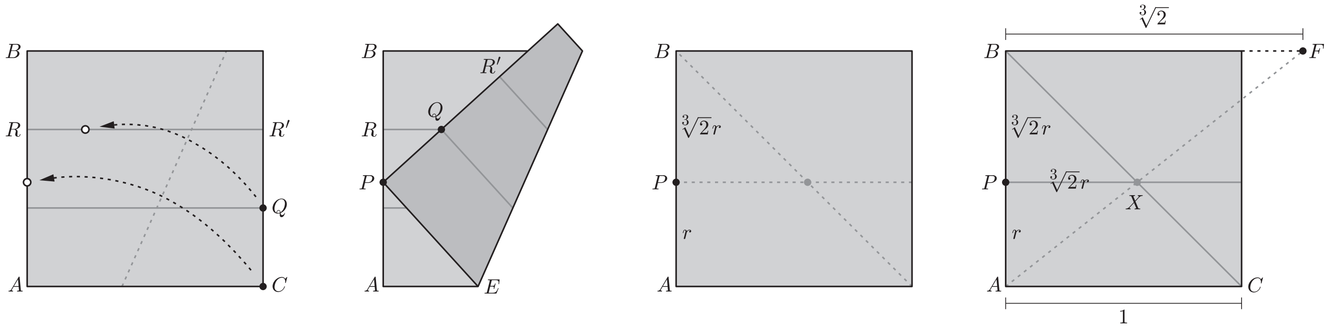
Niestety, rzadko mówi się o tym, że origami jest silniejsze niż konstrukcje przy użyciu cyrkla i linijki (!). Ale co to właściwie znaczy? Dwa sławne problemy starożytnej Grecji – trysekcja kąta i podwojenie objętości sześcianu – okazały się nierozwiązywalne za pomocą cyrkla i linijki. W czym tkwi istota sprawy? Oba zagadnienia sprowadzają się do rozwiązania równań stopnia trzeciego. Z kolei dzięki linijce i cyrklowi jesteśmy w stanie stworzyć tylko konstrukcje będące rozwiązaniami co najwyżej serii równań kwadratowych. I tu ukazuje nam się magia origami – dziecinnie proste składanie kartki papieru okazało się sposobem na rozwiązanie powyższych problemów, nad którymi głowili się starożytni. Poniżej przedstawiamy schematy trysekcji kąta i otrzymania odcinka długości $\sqrt[3]{2}$, którego konstrukcja jest wystarczająca do rozwiązania problemu podwojenia sześcianu.



Podział kwadratu na trzy równe części. Istnieje wiele różnych sposobów ścisłego podzielenia kwadratowej kartki papieru na trzy identyczne prostokąty. Powyżej przedstawiamy dwa z nich.

Konstrukcja odcinka długości $\sqrt[3]{2}$

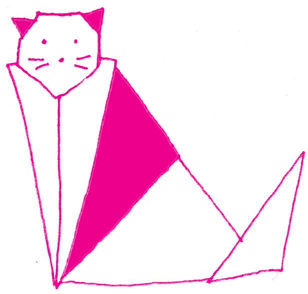
Chcąc podwoić sześcian o boku jeden, musimy po prostu skonstruować sześcian o krawędzi długości $\sqrt[3]{2}$. Wyznaczenie odcinka tej długości za pomocą składania papieru nie jest nadto skomplikowane. Wystarczy najpierw tak zgiąć kwadratową kartkę, aby powstałe dwa równoległe do boku zagięcia podzieliły go na trzy równe części (rysunek obok). Następnie (rysunek poniżej) zaginamy prawy dolny róg w ten sposób, aby punkt C leżał na odcinku AB (oznaczmy to miejsce P) punkt Q natomiast na odcinku RR'. Okazuje się, że otrzymujemy następującą zależność: $|PB| = \sqrt[3]{2}|AP|$. Dlaczego? Załóżmy, że odcinki AP, PB i AE mają odpowiednio długości r, ar i d. W tej sytuacji odcinki RA, RP oraz PE mierzą $\frac{2r(1+a)}{3}$, $\frac{r(2a-1)}{3}$ i $r(1+a)-d$. Stosując twierdzenie Pitagorasa do trójkąta PEA, otrzymujemy, że d wynosi $\frac{ra(2+a)}{2(1+a)}$. Ponieważ trójkąty PEA i QPR są podobne, dostajemy równość $\frac{d}{r(1+a)-d} = \frac{r(2a-1)}{r(1+a)}$. Po przekształceniach dochodzimy do interesującego nas wyniku $a = \sqrt[3]{2}$. Korzystając z podobieństwa trójkątów AXC i FXB oraz trójkątów BPX i BAC, można łatwo wykazać, że odcinek BF ma długość $\sqrt[3]{2}$.



Rozwiązanie zadania F 908.
60 MeV to mniej niż $1/15$ masy spoczynkowej protonu, a więc do oszacowań możemy zastosować przybliżenie nierelatywistyczne. Oddziaływanie z polem prostopadłym do toru jest źródłem siły dośrodkowej. Mamy więc: $eE = mv^2/r$ w przypadku pola elektrycznego i $evB = mv^2/r$ w przypadku pola magnetycznego, gdzie e oznacza ładunek elementarny, a v – prędkość protonów. Po skorzystaniu z faktu, że $T = mv^2/2$, otrzymujemy:

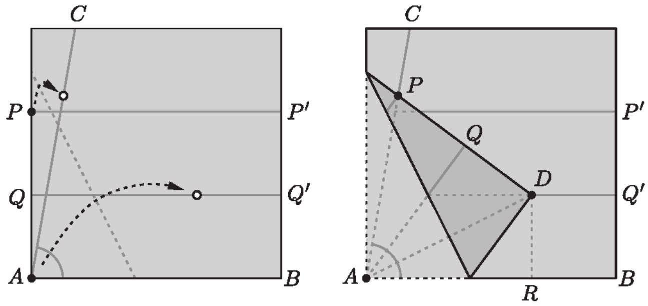
$$E = \frac{2T}{er} \quad \text{i} \quad B = \frac{\sqrt{2Tm}}{er}.$$

Po podstawieniu danych liczbowych mamy $E \approx 120$ MV/m i $B \approx 1{,}12$ T. Pole elektryczne o otrzymanym natężeniu jest technicznie nieosiągalne, natomiast wartość B odpowiada w przybliżeniu indukcji tuż przy biegunie magnesu neodymowego używanego, na przykład, do pokazów.



Trysekcja kąta

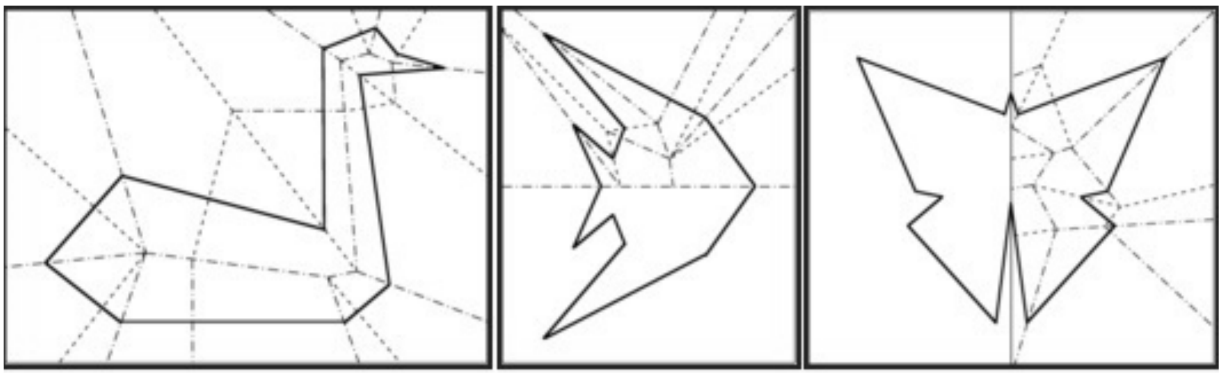
Kąt CAB może zostać podzielony na trzy równe części w następujący sposób. Robimy zagięcia PP' oraz QQ' równoległe do podstawy AB, gdzie QQ' leży pośrodku pomiędzy pozostałymi dwoma (nie oznacza to jednak, że $|AQ|$ stanowi jedną trzecią boku kwadratu). Następnie wykonujemy takie złożenie, w wyniku którego punkt P leży na odcinku AC oraz punkt A leży na odcinku QQ' w pozycji D. Kąt DAB jest jedną trzecią wyjściowego kąta CAB, ponieważ trójkąty PAQ, DAQ oraz DAR są przystające.



Co ciekawe, inaczej sformułowana aksjomatyka origami pozwala – w teorii – rozwiązać równania n-tego stopnia. Jest to jednak nieefektywne i niestosowane w praktyce.

Jak wielu z nas zapewne słyszało, w klasycznym origami zabronione jest przecinanie papieru. Co się jednak stanie, jeśli dopuścimy cięcie? Jakie kształty jesteśmy w stanie otrzymać za pomocą złożenia papieru i – powiedzmy – jednego prostego cięcia? To tak zwany problem *fold & one cut* pochodzący z 1721 roku. Pojawił się on po raz pierwszy w japońskiej książce z zagadkami. Swego czasu zagadnienie to było nawet przedmiotem magicznych sztuczek. Problem został rozwiązany dopiero w 1998 roku przez Erika Demaine'a, Martina Demaine'a i Annę Lubiw. Udowodnili oni, że za pomocą jednego prostego przecięcia pojedynczej kartki papieru złożonej na płasko można otrzymać każdy kształt o prostych bokach. Możemy zatem wyciąć pojedynczy wielokąt, wiele rozłącznych wielokątów, zagnieżdżone wielokąty, przylegające wielokąty...

Spójrzmy na kilka przykładów. Wystarczy wykonać wyznaczone zagięcia i jedno proste cięcie wzdłuż powstałej linii, aby otrzymać łabędzia, rybę czy motyla.



Niektórzy mogą spytać, czy to już wszystko, co może nam zaoferować składanie papieru. Otóż nie! Techniki origami są również szeroko wykorzystywane w technologii i medycynie (m.in. przy składaniu teleskopów kosmicznych, paneli słonecznych, poduszek powietrznych, stentów). Warto wspomnieć, że w ostatnich latach niektórzy z origamistów pracują nad matematycznym modelem „zwijania białka" (ang. *protein folding*) – procesu fizycznego obecnego we wszystkich żywych organizmach i wirusach, co może mieć zastosowania w medycynie. Jak widzimy, origami to nie tylko rodzaj sztuki i rozrywki. To także potężne narzędzie matematyczne o szerokim wachlarzu zastosowań.