Iloczyn skalarny

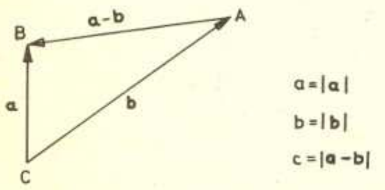
Mgr Krzysztof NOWIŃSKI

Jednym z podstawowych wzorów trygonometrycznych jest *twierdzenie kosinusów* podające zależność między bokami trójkąta a jednym z jego kątów:

$$c^2 = a^2+b^2-2ab\cos C.$$

Na formułę tę można patrzeć jako na uogólnienie twierdzenia Pitagorasa (do którego sprowadza się, gdy kąt C jest prosty, czyli $\cos C = 0$).

Dla bliższego zbadania geometrycznego i algebraicznego sensu twierdzenia kosinusów użyteczny jest zapis wektorowy, w którym boki trójkąta będą reprezentowane przez wektory $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ i $\mathbf{a}-\mathbf{b}$.



Oznaczając jak zwykle przez $|\mathbf{a}|$ długość wektora $\mathbf{a}$ otrzymamy wzór:

$$|\mathbf{a}-\mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a}|^2+|\mathbf{b}|^2-2|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|\cos \sphericalangle (\mathbf{a}, \mathbf{b}).$$

Nazwijmy wyrażenie $|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|\cos \sphericalangle (\mathbf{a}, \mathbf{b})$ *iloczynem skalarnym wektorów* $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$, oznaczmy je w skrócie symbolem $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ i zbadajmy pewne szczególne własności tej funkcji.
Łatwo sprawdzić, kładąc we wzorze kosinusów $\mathbf{a} = \mathbf{b}$, że

(0) $$(\mathbf{a}, \mathbf{a}) = |\mathbf{a}|^2,$$

co pozwala przepisać ten wzór w postaci

$$(\mathbf{a}-\mathbf{b}, \mathbf{a}-\mathbf{b}) = (\mathbf{a}, \mathbf{a})+(\mathbf{b}, \mathbf{b})-2(\mathbf{a}, \mathbf{b}),$$

a to zaczyna przypominać wzór na kwadrat różnicy. Nieco bliższe sprawdzenie przekona nas, że wyrażenie $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ ma wiele formalnych cech iloczynu (mówimy, że jest dwuliniowe), mianowicie:

(1) $(\mathbf{a}, \mathbf{b}+\mathbf{c}) = (\mathbf{a}, \mathbf{b})+(\mathbf{a}, \mathbf{c})$,
(2) $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = (\mathbf{b}, \mathbf{a})$
oraz gdy λ jest liczbą rzeczywistą, to
(3) $(\lambda\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \lambda(\mathbf{a}, \mathbf{b})$.
Ponadto z równości (0) wynika, że
(4) $(\mathbf{a}, \mathbf{a}) \geqslant 0$ i $(\mathbf{a}, \mathbf{a}) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{a} = 0$,
a wyrażenie $\sqrt{(\mathbf{a}, \mathbf{a})}$ jest długością wektora $\mathbf{a}$.

Można rozważać sytuacje jeszcze ogólniejsze, w których wektory mnoży się przez liczby zespolone (por. artykuł J. Kijowskiego). Warunek (2) zastępuje się wtedy warunkiem

(2′) $$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \overline{(\mathbf{y}, \mathbf{x})}$$

(kreska jest symbolem sprzężenia liczby zespolonej).

Wynika stąd dalej, że odległość euklidesowa końców wektorów $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$ zaczepionych we wspólnym początku (nazywamy ją odległością tych wektorów) wyraża się wzorem

$$\varrho(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \sqrt{(\mathbf{a}-\mathbf{b}, \mathbf{a}-\mathbf{b})}.$$

Znając własności (0)–(3) i wiedząc, że wersory (wektory kierunkowe) osi układu współrzędnych w n-wymiarowej przestrzeni euklidesowej są prostopadłe i mają długość 1, możemy również wyprowadzić wzór analityczny na iloczyn skalarny:

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1y_1+ \ldots +x_ny_n = \sum_{i=1}^{n} x_iy_i,$$

gdzie $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ w danym układzie współrzędnych.

Np. na płaszczyźnie $\mathbf{e}_1 = (1,0)$ jest wersorem pierwszej osi, a $\mathbf{e}_2 = (0, 1)$ — wersorem drugiej osi. Zatem jeśli $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ i $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$ to $\mathbf{x} = x_1 \cdot \mathbf{e}_1+x_2 \cdot \mathbf{e}_2$, $\mathbf{y} = y_1 \cdot \mathbf{e}_1+y_2 \cdot \mathbf{e}_2$. Z własności iloczynu skalarnego wynika, że
$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1y_1(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1)+x_1y_2(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)+ +x_2y_1(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1)+x_2y_2(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2) = x_1y_1+x_2y_2$
bo $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1) = 1 = (\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2)$ oraz $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = 0$ (bo są prostopadłe).

Zastanówmy się, co by było, gdybyśmy zaczęli rozważać „uogólniony iloczyn skalarny”, tzn. dowolną funkcję $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ przyporządkowującą parom wektorów liczby i spełniającą warunki (1)–(4). Okaże się, że taki iloczyn analitycznie będzie się wyrażał wzorem

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_iy_i$$

(Układ liczb a_{ij} będzie spełniał pewne warunki, z których jeden: $a_{ij} = a_{ij}$ wynika bezpośrednio z wzoru (2), a inne są nieco bardziej skomplikowane. Geometrycznie sprowadzają się one do tego, że wszystkie kule muszą być podobnymi elipsoidami). Powstaje pytanie, co właściwie uzyskujemy wprowadzając taką funkcję. Odpowiedź jest nieco zaskakująca: uzyskujemy mianowicie „całość” geometrii euklidesowej. Możemy bowiem przy pomocy takiej funkcji określić:

— nową długość wektora wzorem

$$||\mathbf{x}|| \overset{\mathrm{df}}{=} \sqrt{(\mathbf{x}, \mathbf{x})},$$

(a więc i pewną nową metrykę, dlaczego?);

— nowy kosinus kąta między wektorami — wzorem

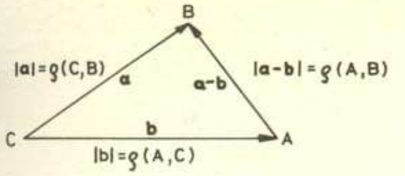
$$\cos \sphericalangle (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \overset{\mathrm{df}}{=} \frac{(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{||\mathbf{x}|| \cdot ||\mathbf{y}||}$$

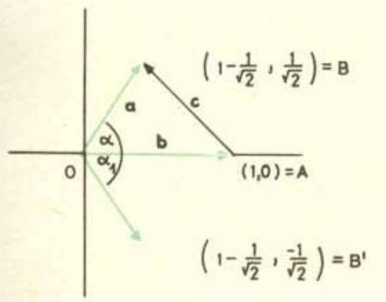
(a więc kąt wypukły między wektorami $\mathbf{x}, \mathbf{y}$);

— nową prostopadłość wektorów, (tym samym również prostych, płaszczyzn itp) — mówiąc, że $\mathbf{x} \perp \mathbf{y}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$.

Przykład: niech $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{4}(x_1-x_2)(y_1-y_2)+ +\frac{1}{9}(x_1+x_2)(y_1+y_2)$.

Wtedy $||\mathbf{x}||^2 = \frac{1}{4}(x_1-x_2)^2+\frac{1}{9}(x_1+ +x_2)^2$, skąd wynika, że np. „kula jednostkowa”, czyli $\{\mathbf{x}: ||\mathbf{x}|| < 1\}$ będzie elipsą o długościach półosi 1 i $\frac{3}{2}$, której dłuższa oś leży na prostej $x_1 = x_2$.





Mamy: $\rho(A, O) = \rho(O, B) = 1$, $\rho(A, B) =$
$= \left|1 - \frac{1}{\sqrt{2}} - 1\right| + \left|\frac{1}{\sqrt{2}} - 0\right| = \sqrt{2}.$
Zatem wzór kosinusów jest następujący:
$(\sqrt{2})^2 = 1^2 + 1^2 - 2.1.1.\cos\alpha.$
Stąd $2\cos\alpha = 0$, $\alpha = \pi/2$. Analogicznie dla α'.
Dla β mamy $\rho(B, B') = \sqrt{2}$, stąd również $\cos\beta = 0$!

Tu można by wysunąć jedno zastrzeżenie: przecież jeżeli mamy np. na płaszczyźnie dowolną metrykę (a wiele przykładów różnych metryk na płaszczyźnie podaje np. M. Moszyńska w artykule o przestrzeniach metrycznych, Delta 1/1975), to wypisany na początku wzór kosinusów, w którym liczby a, b i c traktujemy jako znane odległości trzech danych punktów, pozwala bezpośrednio wyznaczyć kosinus kąta między bokami o długościach a i b.

Takie podejście nie prowadzi na ogół niestety do pozytywnych rezultatów. Przy pewnych metrykach przestaje bowiem być prawdziwe twierdzenie, że dwa wektory prostopadłe do trzeciego są równoległe. Na przykład na płaszczyźnie z metryką określoną wzorem

$$\varrho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$$

wektory $\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ oraz $\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right)$ byłyby przy takiej definicji kąta prostopadłe, a jednocześnie każdy z nich byłby prostopadły do wektora $(1, 0)$! Szkic dowodu — obok.
Istnieje jednak pewne bardzo proste kryterium geometryczne pozwalające odróżniać metryki dające się określić za pomocą pewnego iloczynu skalarnego od innych metryk. Zachodzi mianowicie

Twierdzenie. Jeżeli w danej metryce każde dwie kule są (w metryce euklidesowej) jednokładnymi elipsoidami, a kule o równych promieniach są przystające, to istnieje iloczyn skalarny $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ wyznaczający tę metrykę.

Mamy więc sposób pozwalający na odróżnianie metryk „dobrych", czyli takich, które można traktować jako fragment pełnej geometrii euklidesowej, od metryk „przypadkowych".

Zauważmy teraz, że w warunkach, które powinien spełniać nasz iloczyn skalarny, występowało jedynie dodawanie wektorów i ich mnożenie przez stałe. Łatwo zauważyć, że płaszczyzna i przestrzeń trójwymiarowa nie są jedynymi zbiorami, w których rozważa się operacje tego typu. Działanie dodawania i mnożenia przez liczbę wprowadza się między innymi w zbiorach funkcji określonych na pewnym ustalonym zbiorze.

Dla przykładu weźmy pod uwagę zbiór wszystkich funkcji określonych i ciągłych na przedziale $\langle 0, 2\pi \rangle$ i przyjmujących tę samą wartość na końcach przedziału $(f(0) = f(2\pi))$.
Powstaje naturalne pytanie: czy można tak rozszerzyć pojęcie iloczynu skalarnego, by obejmowało ono również przypadek takich funkcji? Okazuje się, że wyrażenie

$$(*) \qquad (f, g) = \int_0^{2\pi} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$$

przyporządkowuje parom funkcji liczby w taki sposób, że spełnione są wszystkie warunki (1)—(4), a więc (f, g) można nazwać iloczynem skalarnym funkcji f i g.

Sprawdzenie, że rzeczywiście warunki te są spełnione, jest dość żmudne rachunkowo i pominiemy je tutaj. Ważna dla nas jest konsekwencja tego faktu: w przestrzeni funkcji ciągłych na przedziale $\langle 0, 2\pi \rangle$ można uprawiać „geometrię euklidesową". Teraz łatwo już sobie wyobrazić, że istnieje wiele przestrzeni, w których można wprowadzać iloczyn skalarny. Nazywa się je przestrzeniami unitarnymi lub — jeśli spełniają pewne dodatkowe warunki — przestrzeniami Hilberta.

Ten dodatkowy warunek — to *zupełność*.
Mówi się, że przestrzeń metryczna jest zupełna, jeśli każdy ciąg (x_n) spełniający tzw. *warunek Cauchy'ego*

$$\lim_{n, m \to \infty} \rho(x_n, x_m) = 0$$

jest zbieżny w tej przestrzeni. Przykładem przestrzeni metrycznej niezupełnej jest odcinek otwarty $(0, 1)$.
Ciąg $\left(\frac{1}{n}\right)$ spełnia warunek Cauchy'ego

$$\lim_{n, m \to \infty} \left|\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right| = 0$$

a jednocześnie ciąg ten nie jest zbieżny *w odcinku* $(0, 1)$, bo jego granica — liczba zero — do tego odcinka nie należy.

O innych zastosowaniach pisze J. Kijowski w tym numerze.

Spośród wielu zastosowań tej „geometrii euklidesowej" wymienimy jedno o poważnych konsekwencjach dla analizy matematycznej:

Twierdzenie. W zdefiniowanej powyżej przestrzeni funkcji ciągłych z iloczynem skalarnym określonym wzorem (*) funkcje $\cos nx$ i $\sin nx$ oraz funkcja stała $(n \in N)$ są parami wzajemnie prostopadłe.

Dowód tego faktu oraz jego konsekwencje, z których m.in. wynika, że można ten układ funkcji traktować jako swego rodzaju „układ współrzędnych" w rozważanej przestrzeni, znajdzie Czytelnik w artykule W. Szlenka o szeregach Fouriera (Delta 4/1976).

Zadanie. Obliczyć długość boków i kąty trójkąta o wierzchołkach 1, x, x^2 w przestrzeni funkcji ciągłych na przedziale $\langle 0, 1 \rangle$ z iloczynem skalarnym

$$(f, g) = \int_0^1 f(x) \cdot g(x)\,\mathrm{d}x.$$