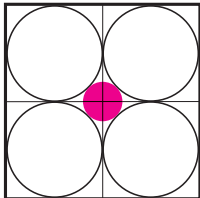
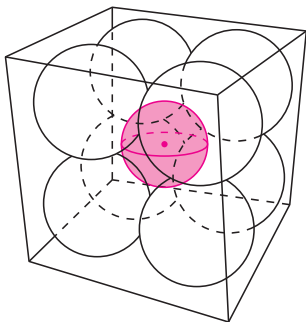


Rys. 1

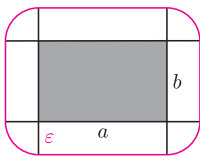
Analogiczny problem dla czworobocianów opisano w *deltoidzie* 9/2010.



Rys. 2



Rys. 3



Rys. 4. ϵ -otoczka prostokąta, jej pole równe jest $ab + 2(a + b)\epsilon + \pi\epsilon^2$.

Zadanie 4 pochodzi z książki K. Ciesielskiego *102 zadania dla małych, średnich i dużych sympatyków matematyki*, Omega, 2012.

Zmieści się?

Joanna JASZUŃSKA

1. Prostokątny pasek papieru można przykryć pewnym kołem. Pasek ten składamy wzdłuż dowolnej prostej (rys. 1). Czy nadal można go przykryć tym samym kołem?
2. Czy trójkąt może zmieścić się w kole mniejszym od koła na nim opisanego?
3. a) Kwadrat o boku 2 dzielimy na cztery kwadraty jednostkowe i w każdy z nich wpisujemy koło. Koło K ma środek w środku kwadratu i jest styczne zewnętrznie do każdego z pozostałych kół (rys. 2). Wyznacz jego promień r .
b) Wyznacz promień analogicznej kuli K dla sześcianu o krawędzi 2 i ośmiu kul o średnicy 1 (rys. 3).
c) Wyznacz promień analogicznej n -wymiarowej kuli K dla n -wymiarowego hipersześcianu o krawędzi 2 i 2^n kul n -wymiarowych o średnicy 1.
4. Poczta w Bęcwalonii nie przyjmuje do przesyłki paczek dłuższych niż 1 metr; firmy kurierskie akurat strajkują. Pan Fletowski chce przesłać pilnie swój cenny flet o długości 1,65 m. Czy istnieje możliwość przesłania fletu?
5. Poczta w Pudełkolandii przewozi tylko prostopadłościenną paczkę, a opłata za przesyłkę równa jest sumie długości, szerokości i wysokości opakowania. Czy można zaoszczędzić, umieszczając pudełko o większej sumie długości wymiarów wewnątrz pudełka o mniejszej sumie?

Rozwiązania

R1. Tak. Koło przykrywające pasek można składać wraz z nim, wtedy złożony pasek mieści się w złożonym kole, które można przykryć kołem niezłożonym. \square

R2. Tak, dowolny trójkąt rozwartokątny zmieści się w kole, którego średnicą jest jego najdłuższy bok – cięciwa koła opisanego. \square

R3. a) Średnica każdego z czterech kół równa jest 1, a przekątna kwadratu jednostkowego ma długość $\sqrt{2}$, stąd $r = \frac{1}{2}(\sqrt{2} - 1)$. \square

b) Średnica każdej z ośmiu kul równa jest 1, a przekątna sześcianu jednostkowego ma długość $\sqrt{3}$, stąd $r = \frac{1}{2}(\sqrt{3} - 1)$. \square

c) Średnica każdej z 2^n kul równa jest 1, a przekątna hipersześcianu jednostkowego ma długość \sqrt{n} , stąd $r = \frac{1}{2}(\sqrt{n} - 1)$. \square

Dla $n > 4$ uzyskujemy $r > \frac{1}{2}$, więc „mała” kulka K jest większa od każdej z „dużych” kul, a dla $n > 9$ mamy $r > 1$, czyli kula K wystaje poza hipersześcian!

R4. Tak. Pan Fletowski może umieścić flet wzdłuż głównej przekątnej sześciennego pudła o krawędzi długości 1 m – jej długość to $\sqrt{3} \approx 1,73$ m. \square

R5. Nie. Rozważmy ϵ -otoczkę pudełka o wymiarach $a \times b \times c$, czyli zbiór złożony z wszystkich punktów z jego wnętrza oraz punktów odległych od niego o mniej niż ϵ (rys. 4). Ma ona kształt większego prostopadłościanu o zaokrąglonych krawędziach i rogach. Jej objętość równa jest

$$abc \text{ (objętość wyjściowego prostopadłościanu)} + \\ + 2(ab + bc + ca)\epsilon \text{ (objętości prostopadłościanów zbudowanych na ścianach)} + \\ + (a + b + c)\pi\epsilon^2 \text{ (fragmenty na równoległych krawędziach sumują się} \\ \text{do walców o promieniu podstawy } \epsilon) + \\ + \frac{4}{3}\pi\epsilon^3 \text{ (fragmenty na rogach prostopadłościanu sumują się do kuli o promieniu } \epsilon).$$

Zauważmy, że jeśli pudełko o wymiarach $d \times e \times f$ da się włożyć do pudełka o wymiarach $a \times b \times c$, to również ϵ -otoczka pierwszego mieści się w ϵ -otoczce drugiego. To z kolei oznacza, że różnica objętości jest nieujemna:

$$abc + 2(ab + bc + ca)\epsilon + (a + b + c)\pi\epsilon^2 + \frac{4}{3}\pi\epsilon^3 - def - 2(de + ef + fd)\epsilon - (d + e + f)\pi\epsilon^2 - \frac{4}{3}\pi\epsilon^3 \geq 0.$$

Załóżmy, że $a + b + c \neq d + e + f$. Powyższa różnica objętości jest wówczas wielomianem stopnia 2 zmiennej ϵ . Skoro ma on wartość nieujemną dla każdego $\epsilon > 0$, to musi mieć dodatni współczynnik przy najwyższej potęgce ϵ . Stąd $a + b + c > d + e + f$, co kończy dowód. \square