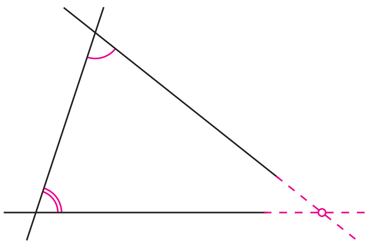
Jak się bawili Wasi dziadkowie

Próżny trud

Marek KORDOS

Jak wszystkim wiadomo, około -300 roku dyrektor Biblioteki Aleksandryjskiej imieniem Euklides napisał dzieło, które jest znane pod późniejszym łacińskim tytułem *Elementy*. W dziele tym z następujących pięciu postulatów wyprowadził całą geometrię (tę nauczaną w szkole i zwaną euklidesową) i całą arytmetykę.

I. *Od dowolnego punktu do dowolnego innego można poprowadzić prostą.*
II. *Ograniczoną prostą można dowolnie przedłużyć.*
III. *Z dowolnego środka dowolnym promieniem można opisać okrąg.*
IV. *Wszystkie kąty proste są równe.*
V. *Jeśli dwie proste na płaszczyźnie tworzą z trzecią kąty jednostronne wewnętrzne o sumie mniejszej od dwóch kątów prostych* (rys. 1), *to proste te, po przedłużeniu, przetną się i to z tej właśnie strony.*



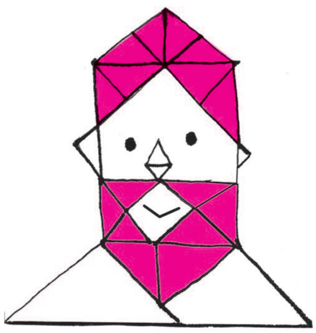
Rys. 1

Dzieło to było przez tysiąclecia uznawane za wzór ścisłości rozumowania dla wszystkich dyscyplin naukowych. Aż przyszły czasy, gdy matematycy tak dokładnie zaczęli przyglądać się swojej dyscyplinie i tak ostre kryteria narzucili rozumowaniom, że trzeba było uznać, iż postulaty Euklidesa można jedynie traktować jako wzorowy zapis intuicji tego, co być powinno. Ale tylko intuicji.

M. Pasch, *Vorlesungen über neuere Geometrie*, 1882.

D. Hilbert, *Grundlagen der Geometrie*, 1899.

Jako pierwszy nowoczesną aksjomatykę geometrii euklidesowej, spełniającą wszelkie wymogi logiki matematycznej, podał w 1882 roku Moritz Pasch, ale za naprawdę dobrą uznano dopiero aksjomatykę, którą zawarł David Hilbert w dziele *Podstawy geometrii*, którego tytuł stał się nazwą dyscypliny matematycznej badającej aksjomatyczne ujęcia geometrii.



Dobra to ta aksjomatyka była, ale, niestety, nie okazała się prosta i w żadnym razie nie nadawała się do tego, by np. uczyć według niej w szkole. Jej pojęciami pierwotnymi (czyli pojęciami, o których traktowały aksjomaty) były trzy rodzaje zmiennych (punkty, proste i płaszczyzny) oraz cztery relacje (leżenie na, leżenie między, przystawanie odcinków i przystawanie kątów). A aksjomatów było 20, z czego co najmniej jedna trzecia o stopniu komplikacji większym niż V postulat Euklidesa.

Powstało pytanie, czy dla geometrii euklidesowej istnieje aksjomatyka prosta i zrozumiała nie tylko dla profesjonalistów. Przede wszystkim zastanowiono się nad doborem pojęć pierwotnych.

Korekta pojęć pierwotnych

A. Tarski, *What is elementary geometry?*, praca napisana w latach 40. XX wieku, wielokrotnie ulepszana, cytowana przed opublikowaniem i ostatecznie opublikowana w 1959 roku.

1. Tu najpopularniejsza okazała się propozycja Alfreda Tarskiego zawierająca jeden zbiór zmiennych (*uniwersum*) – to punkty – i dwie relacje – leżenia między i przystawania:

$$\langle \mathbb{S}; \mathsf{B}, \equiv \rangle,$$

gdzie napis $\mathsf{B}(ABC)$ oznacza, że punkt B należy do odcinka AC, a napis $AB \equiv CD$ – że odcinki AB i CD są przystające.

Mający styczność z podstawami geometrii zdziwią się zapewne, że oznaczam tu punkty wielkimi literami, choć praktyka i prace z tej dyscypliny każą oznaczać je – jako elementy uniwersum – literami małymi. Czynię tak ze względu na tradycję nauczania szkolnego, gdzie małymi literami oznacza się proste.

Za pomocą tych pojęć można zdefiniować wszystkie pojęcia pierwotne Hilberta. Definiujemy kolejno współliniowość

$$\mathsf{L}_{\mathrm{T}}(ABC) \iff \mathsf{B}(ABC) \vee \mathsf{B}(BCA) \vee \mathsf{B}(CAB),$$

co nie budzi wątpliwości, i mamy prostą, i zbiór prostych

$$\mathbb{L}_{\mathrm{T}}(AB) := \{C : \mathsf{L}_{\mathrm{T}}(ABC)\} \qquad \mathcal{L}_{\mathrm{T}} := \{\mathbb{L}_{\mathrm{T}}(AB) : A \neq B\}.$$

Płaszczyzna to przecież symetralna odcinka, więc definiujemy

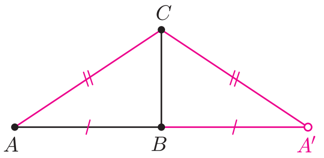
$$\mathbb{P}_{\mathrm{T}}(AB) := \{C : AC \equiv CB\} \qquad \mathcal{P}_{\mathrm{T}} := \{\mathbb{P}_{\mathrm{T}}(AB) : A \neq B\}.$$

Hilbertowskie *leżenie na* to teraz zwykłe należenie i do zdefiniowania pozostaje tylko przystawanie kątów (k, l, m, n to proste) – wykorzystujemy tu II cechę przystawania trójkątów:

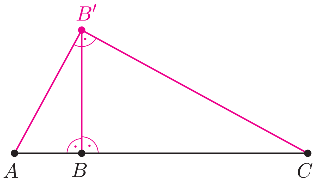
Oczywiście w definicji przystawania kątów można zamiast małego kwantyfikatora napisać duży, zamieniając równocześnie ostatnią koniunkcję na implikację.

$$kl \equiv_{\mathrm{T}} mn \iff \exists ABCA'B'C' : (A \neq B \neq C \wedge A,\, B \in k \wedge B,\, C \in l \wedge \wedge A' \neq B' \neq C' \wedge A',\, B' \in m \wedge B',\, C' \in n \wedge ABC \equiv A'B'C'),$$

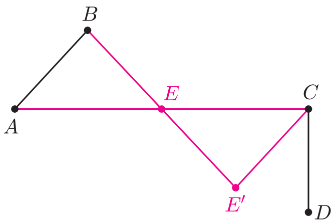
gdzie $ABC \equiv A'B'C'$ to $AB \equiv A'B' \wedge BC \equiv B'C' \wedge CA \equiv C'A'$.



Rys. 2

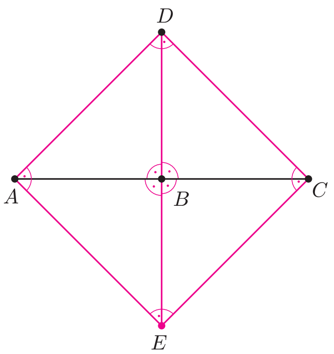


Rys. 3

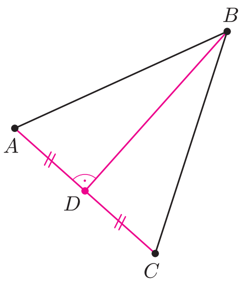


Rys. 4

W przestrzeni trójwymiarowej relację Pieriego można zdefiniować za pomocą relacji trójkąta równobocznego, co na płaszczyźnie jest niemożliwe.



Rys. 5



Rys. 6

Różnica między pomysłem Tarskiego a realizacją Jaśkowskiego polega na tym, że Jaśkowski rozważa kule z brzegiem, a Tarski bez brzegu (co komplikuje definicję punktów).

2. Z układu pojęć pierwotnych Tarskiego można usunąć leżenie między, otrzymując system

$$\langle \mathbb{S}; \equiv \rangle,$$

poprzez następujące trzy definicje:
– współliniowości

$$\mathsf{L}_{\equiv}(ABC) \iff A = B \vee \forall DD' : (DA \equiv AD' \wedge DB \equiv BD' \implies DC \equiv CD')$$

(C leży na każdej płaszczyźnie przechodzącej przez A i B – porównaj definicję płaszczyzny w systemie Tarskiego);
– kąta prostego (rys. 2)

$$\lrcorner_{\equiv}(ABC) \iff A = B \vee \exists A' : (A \neq A' \wedge AB \equiv BA' \wedge AC \equiv CA' \wedge \mathsf{L}_{\equiv}(ABA'));$$

– no i leżenia między (rys. 3)

$$\mathsf{B}_{\equiv}(ABC) \iff \mathsf{L}_{\equiv}(ABC) \wedge \exists B' : (\lrcorner_{\equiv}(ABB') \wedge \lrcorner_{\equiv}(B'BC) \wedge \lrcorner_{\equiv}(AB'C)).$$

3. Mario Pieri już w 1903 roku zauważył, że relacja przystawania może być zubożona – jego relacja $\mathsf{P}(ABC)$ oznaczała, że trójkąt ABC jest równoramienny ($AB \equiv BC$). Dowód wystarczalności systemu

$$\langle \mathbb{S}; \mathsf{P} \rangle,$$

jest prosty, bo – jak łatwo sprawdzić – poprzednio relacje L, $\lrcorner$ i B zdefiniowaliśmy *de facto* za pomocą relacji P. Pozostaje do zdefiniowania pełne przystawanie, co można zrobić w dwóch krokach:
najpierw środek odcinka

$$\mathsf{M}_{\mathrm{P}}(ABC) \iff \mathsf{B}(ABC) \wedge \mathsf{P}(ABC),$$

i już (rys. 4)

$$AB \equiv CD \iff \exists EE' : (\mathsf{M}_{\mathrm{P}}(AEC) \wedge \mathsf{M}_{\mathrm{P}}(BEE') \wedge \mathsf{P}(E'CD)).$$

4. W latach 40. Frederick Jenks (i dziesięć lat później Dana Scott) zajął się wymienioną już relacją kąta prostego, $\lrcorner$. Okazuje się, że system

$$\langle \mathbb{S}; \lrcorner \rangle$$

też wystarcza do opisania geometrii – przejście do systemu Pieriego to najpierw definicja środka (rys. 5)

$$\mathsf{M}_{\mathrm{J}}(ABC) \iff \exists DE : (\lrcorner(ABD) \wedge \lrcorner(ABE) \wedge \lrcorner(CBD) \wedge \lrcorner(CBE) \wedge$$
$$\wedge \lrcorner(ADC) \wedge \lrcorner(DCE) \wedge \lrcorner(CEA) \wedge \lrcorner(EAD),$$

skąd od razu (rys. 6)

$$\mathsf{P}_{\mathrm{J}}(ABC) \iff \exists D : (\mathsf{M}_{\mathrm{J}}(ADC) \wedge \lrcorner(ADB)).$$

Każdy z wymienionych (i wiele innych) układów pojęć pierwotnych został wyposażony w układ aksjomatów prowadzący do geometrii euklidesowej. Wszystkie one są dość okropne (do czego jeszcze wrócę), a w każdym razie żaden nie został zaakceptowany do użytku powszechnego, a wspomniana popularność systemu Tarskiego ma swoje źródło w tym, że najłatwiej przed sądem udowodnić, że jest zrozumiały i poprawny pod każdym względem (daje nawet teorię rozstrzygalną, ale to już zaleta wyłącznie dla zawodowców).

Fakt, że najstarsza z teorii matematycznych, powszechnie nauczana w szkole, nie ma zadowalającej aksjomatyki, podczas gdy inne teorie mają (i to piękne, jak teoria grup czy geometria rzutowa), budził wiele emocji. Byli i tacy, którzy sądzili, iż jesteśmy ofiarami zaproponowanego przez Greków zestawu pojęć opartego o wydumany i nierealizowalny obiekt, jakim jest punkt.

Młody Tarski w 1929 roku zaproponował, by geometrię opisać jako zbiór kul z jedną tylko relacją zawierania (nazwał to geometrią naturalną). Przedstawiam ten pomysł w wersji Stanisława Jaśkowskiego z 1949 roku. Kule oznaczane będą literami gotyckimi.

Punkty zdefiniować bardzo łatwo – to najmniejsze kule:

$$\mathbb{S} := \{\mathfrak{a} : \forall \mathfrak{b}\ (\mathfrak{b} \subset \mathfrak{a} \Rightarrow \mathfrak{b} = \mathfrak{a})\}.$$

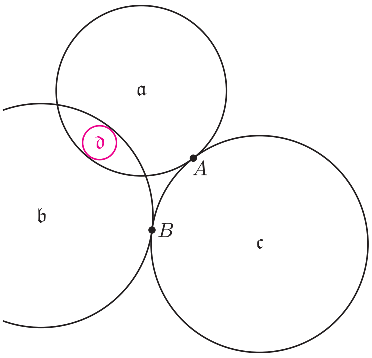
Dalej punkty w tym systemie będę oznaczał dużymi literami łacińskimi, jak poprzednio. Definiujemy kolejno styczność kul

$$\mathfrak{a} \bigcirc\!\!\bigcirc \mathfrak{b} \iff \exists! \mathfrak{c}\ (\mathfrak{c} \subset \mathfrak{a}, \mathfrak{b}),$$

fakt, że punkt leży na powierzchni kuli

$$A \mathbin{\dot{\bigcirc}} \mathfrak{a} \iff A \bigcirc\!\!\bigcirc \mathfrak{a} \wedge \exists \mathfrak{b}\ (A \bigcirc\!\!\bigcirc \mathfrak{b} \bigcirc\!\!\bigcirc \mathfrak{a} \wedge \mathfrak{b} \neq A)$$

(a więc jest punktem styczności dwóch kul),



Rys. 7

F. Bachmann, *Aufbau der Geometrie aus dem Spiegelungsbegrieff*, 1959.

wskazujemy kulę o danej średnicy

$A \mathbin{\bullet\!\!\bigcirc\!\!\bullet} B = \mathfrak{c} \iff A, B \mathrel{\overset{\bullet}{\bigcirc}} \mathfrak{c} \wedge \neg\big(\exists \mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{d}\ (A \subset \mathfrak{a} \wedge B \subset \mathfrak{b} \wedge \mathfrak{a} \bigcirc\!\!\bigcirc \mathfrak{c} \bigcirc\!\!\bigcirc \mathfrak{b} \wedge \mathfrak{d} \subset \mathfrak{a} \wedge \mathfrak{d} \subset \mathfrak{b})\big)$

(to, czego zabrania zanegowany nawias, jest przedstawione na rysunku 7), a stąd już blisko do definicji kąta prostego

$$\lrcorner(ABC) \iff B \mathrel{\overset{\bullet}{\bigcirc}} (A \mathbin{\bullet\!\!\bigcirc\!\!\bullet} C),$$

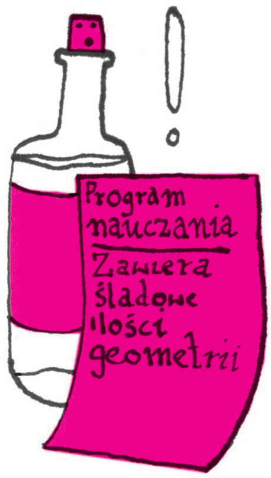
jako kąta wpisanego opartego na średnicy.

Ale i ten pomysł, mimo oczywistej prostoty i naturalności, rozsądną aksjomatyką nie zaowocował.

Inne drogi

Wspomniany już Frederick Jenks miał też inny pomysł, by aksjomatyzować nie obiekty, lecz ruch. Jeśli to skrzyżować ze starym hasłem Leibniza, by w geometrii rachować na obiektach geometrycznych, i z koncepcją Juhassona Hjelmsleva, by był to rachunek symetrii, to otrzymamy konsekwentnie doprowadzoną do końca pracę Friedricha Bachmanna, którą opisałem w *Delcie* 6/2013. Ta propozycja, nieco „złagodzona”, jest obecna w szkołach niemieckich, a polski czytelnik może to obejrzeć, oglądając dział geometrii w wydanym przez Prószyńskiego *Atlasie matematyki.*

No właśnie, co z tą szkołą? Kiedy wraz z kolegami uruchomiliśmy w 1967 roku klasy matematyczne w warszawskim ówczesnym liceum Gottwalda (dziś Staszica), uczyliśmy geometrii na podstawie aksjomatyki Tarskiego. Cóż, młodzi przeżyli (sam uczyłem tak geometrii jeszcze w dwóch „normalnych” szkołach) i dzisiaj wielu z nich jest zawodowymi matematykami i nosi tytuły profesorskie. Więc można, ale my oceniamy ten eksperyment jako znęcanie się nad nieletnimi.



Usprawiedliwia nas fakt, że akurat wtedy weszła w życie ośmioletnia szkoła podstawowa, a młodzież w nowym liceum dostała do ręki podręczniki geometrii oparte o mało udaną modyfikację systemu niemieckiego. Zdrowy organizm polskiej szkoły tę propozycję dość szybko odrzucił.

Efekt tych eksperymentów był taki, że dziś uczy się geometrii śladowo.

Odwołując się do poważniejszych problemów, wypada przypomnieć, że w latach sześćdziesiątych w polskiej matematyce odbyła się rewolucja bourbakistowska, czyli zmiana generalnego nurtu z opartego na aksjomatach i analogiach z fizyką na oparty o teorię kategorii, a więc traktujący matematykę jako naukę o obiektach i ich przekształceniach. To też zaowocowało propozycjami dla szkoły, z czym zetknąłem się osobiście, mając za temat pracy magisterskiej adaptowanie na polski grunt koncepcji nauczania geometrii Gustave'a Choqueta. Koledzy z Krakowa w swoich klasach matematycznych nauczali po bourbakistowsku (co zresztą – jak wspominają – wywołało zgrozę wizytujących ich Francuzów-bourbakistów) – młodzież przeżyła i to.

* * *

Rozsądnej odpowiedzi na pytanie, dlaczego geometria euklidesowa, przecież tak nam bliska, której zawdzięczamy – przez fakt, że jako jedyna dopuszcza zmieniające skalę podobieństwa – rozkwit naszej cywilizacji, nie ma prostej, nadającej się do nauczania aksjomatyki, nie potrafimy udzielić. Co więcej, po dwudziestowiecznym wzmożeniu badań nad tą kwestią dziś pogodziliśmy się z tak wyglądającą rzeczywistością.

Dziś dla większości (również dla zawodowych matematyków) geometria euklidesowa to badanie zbioru $\mathbb{R}^n$, w którym odległość dana jest wzorem

$$|PQ| = \sqrt{(p_1 - q_1)^2 + \cdots + (p_n - q_n)^2}.$$

Podobnie opisuje się też inne geometrie.

A ta geometria, którą wszyscy podziwiali jeszcze pięćdziesiąt lat temu, staje się dyscypliną, której percepcja podobna jest do sposobu, w jaki oglądają dzieła plastyczne historycy sztuki. I która przez swoich artystów jest ciągle jeszcze tu i ówdzie uprawiana.

Rozwiązanie zadania F 871.
Granicę wysokości góry wyznacza wytrzymałość jej dolnych warstw. Jeżeli ciśnienie górnych warstw wystarczy do zerwania sztywności wiązań, to dolne warstwy zaczną się „rozpływać”, co spowoduje „opadanie” wierzchołka góry. Oszacujmy, przy jakiej wysokości h zmniejszenie energii potencjalnej skał na skutek obniżenia środka ciężkości o Δh przewyższy energię potrzebną do stopienia dolnej warstwy skał o gęstości ρ, grubości Δh i polu powierzchni S. Zmiana energii potencjalnej wyniesie $hSg\rho\Delta h$. Energia potrzebna do stopienia warstwy wynosi $LS\rho\Delta h$. Otrzymujemy stąd warunek „stopienia podstawy”:

$$hSg\rho\Delta h > LS\rho\Delta h,$$

a więc największą możliwą wysokością jest $h = L/g$, co dla podanych wartości L daje wartość w granicach od 12,8 km do 23,6 km.