Czy π jest *constans*?

Piotr KOPACZ[*]

Jedną z najistotniejszych wielkości w matematyce jest π, której poświęcono wiele ścisłych prac i filozoficznych rozważań od starożytności (jeszcze zanim została nazwana swoim obecnym imieniem) do czasów współczesnych. Co pewien czas można znaleźć informacje o kolejnych rekordach w wyznaczaniu coraz dłuższego jej rozwinięcia dziesiętnego. Przeglądając literaturę, portale o tematyce matematycznej bądź podręczniki szkolne, można także spotkać się z różnymi sposobami definiowania liczby π. Według encyklopedii szkolnej „Matematyka": *liczba* π, *ludolfina, stała matematyczna określona jako stosunek długości okręgu koła do długości jego średnicy*; $\pi = 3{,}14159\ldots$ Mając przed sobą cytowaną definicję, spróbujmy zastanowić się, czy ów stosunek jest ten sam dla każdego okręgu i odpowiadającej mu średnicy w ogólnym przypadku.

Zaczniemy od geometrii sferycznej. Okręgiem na sferze nazywamy miejsce geometryczne wszystkich jej punktów, których odległość od wybranego punktu S (na sferze) wynosi r, gdzie $r \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$. Odległości na sferze można wyrażać w mierze kątowej lub łukowej. Nie powinno więc budzić tu zdziwienia stwierdzenie, że, na przykład, długość promienia okręgu wynosi $60°$ czy $\frac{\pi}{3}$. Dalej będziemy używać miary łukowej. Punkt S nazywamy środkiem (sferycznym), a r – promieniem (sferycznym) okręgu. Okręgi sferyczne możemy podzielić na małe i wielkie. Okręgi małe powstają wskutek przecięcia sfery płaszczyzną nieprzechodzącą przez jej środek ($r < \frac{\pi}{2}$). Okręgi wielkie to zbiory punktów przecięcia sfery z pewną płaszczyzną przechodzącą przez jej środek.

Taki okrąg, na przykład równik kuli ziemskiej, ma promień $r = \frac{\pi}{2}$ i dwa środki będące punktami antypodycznymi (na Ziemi są to bieguny). Najkrótszym połączeniem, czyli linią geodezyjną lub ortodromą, dwóch punktów sfery jest właśnie krótszy łuk przechodzącego przez nie okręgu wielkiego. Jeśli te łuki są równej długości, to oba są najkrótszymi połączeniami. Okrąg wielki jest więc odpowiednikiem prostej euklidesowej. Ta sferyczna prosta ma skończoną długość i jest zamknięta.

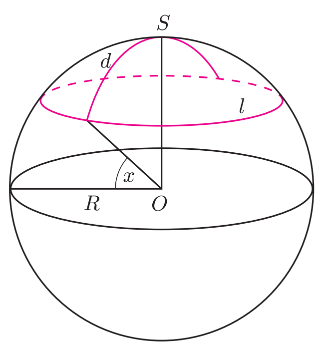
Średnica okręgu (co na płaszczyźnie euklidesowej wydaje się zbędnym wyjaśnieniem) to odcinek łączący jego przeciwległe punkty.

W celu łatwiejszego wyrażania odległości na powierzchni sfery można posłużyć się pojęciem szerokości geograficznej. Szerokość geograficzna danego punktu sfery to kąt zawarty między płaszczyzną równika a pionem tego punktu.

Ustalmy promień sfery $R > 0$. Długość równika wynosi $2\pi R$, a długość jego średnicy d, równa dwóm długościom sferycznego promienia równika, jest połową długości równika, czyli $d = \pi R$. Zatem stosunek długości okręgu wielkiego do długości jego średnicy w tej sytuacji jest równy 2. Długość i średnicę okręgu równoleżnikowego, leżącego na szerokości geograficznej $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$, można wyrazić za pomocą wzorów

$$L = 2\pi R \cos x, \qquad d = 2R\left(\frac{\pi}{2} - x\right).$$

A każdy okrąg na sferze można przedstawić jako okrąg równoleżnikowy – trzeba zmienić położenie równika tak, żeby jego płaszczyzna była równoległa do płaszczyzny wyznaczonej przez wybrany okrąg. Względem nowego równika możemy obliczyć szerokość geograficzną wybranego okręgu.



Rys. 1. Okrąg sferyczny i jego średnica. To, że ograniczone przez ten okrąg koło ma mniejsze pole niż płaskie koło o tym samym promieniu, wyraża fakt, iż to pole jest takie, jak pole płaskiego koła o promieniu będącym przestrzenną (!) odległością jego środka od brzegu.

Na przykład, dla szerokości geograficznej równej $\frac{\pi}{3}$ długość odpowiadającego jej okręgu małego równa jest połowie długości równika, czyli πR, a średnica ma długość $2R \cdot \frac{\pi}{6}$. Zatem w tym przypadku stosunek długości okręgu i jego średnicy jest równy 3.

Zobaczyliśmy kilka przykładów, a teraz warto zadać ogólne pytanie o zakres wartości stosunku długości dowolnego okręgu do jego średnicy na sferze. Żeby łatwiej opisać dalsze obliczenia, wprowadźmy funkcję $\widetilde{\pi}$ wyrażającą stosunek długości okręgu do długości odpowiadającej mu średnicy. Ponieważ wszystkie okręgi na danej szerokości geograficznej są takie same, parametrem funkcji będzie właśnie szerokość geograficzna. Ogólny wzór, dla $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$, to

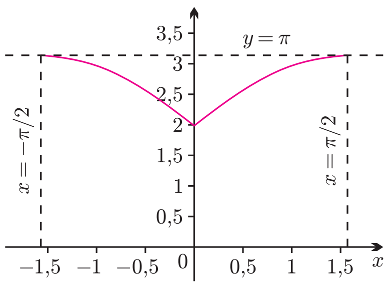
$$\widetilde{\pi}(x) = \frac{L(x)}{d(x)},$$

a po podstawieniu otrzymujemy

$$\widetilde{\pi}(x) = \frac{2\pi R \cos x}{2R\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} = \frac{2\pi}{\pi - 2x} \cos x.$$

[*] Wydział Nawigacyjny, Akademia Morska w Gdyni

Funkcja $\widetilde{\pi}$ jest więc rosnąca w rozpatrywanej dziedzinie, a zbiór jej wartości to odcinek $[2, \pi)$. Stosunek długości okręgu do długości jego średnicy na sferze nie tylko nie jest wielkością stałą, ale opisuje go całkiem nietrywialna funkcja.



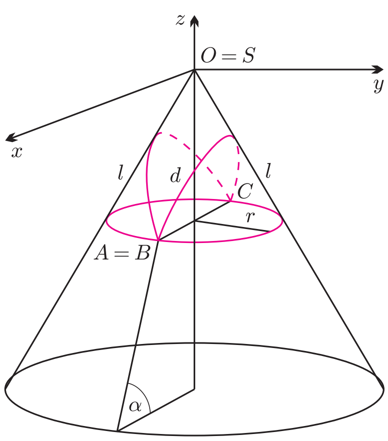
Rys. 2. Wykres funkcji $\widetilde{\pi}$ dla okręgów sferycznych.

Dziedzinę funkcji $\widetilde{\pi}$ zawęziliśmy dotąd do przedziału $[0, \frac{\pi}{2})$, co odpowiada półsferze bez bieguna o dodatniej (północnej) szerokości geograficznej. Jednak w obliczeniach uwzględniliśmy wszystkie możliwe długości okręgów na sferze, czyli właściwie znamy już wartości funkcji $\widetilde{\pi}$ na przedziale $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Następujący wzór jest uogólnieniem poprzedniego na ujemne szerokości geograficzne:

$$\widetilde{\pi}(x) = \frac{2\pi}{\pi - 2|x|} \cos x.$$

Wykres parzystej funkcji $\widetilde{\pi}$ dla $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ przedstawia rysunek 2.

W granicznym przypadku, gdy promień sferyczny r małego okręgu dąży do zera, okrąg sferyczny coraz bardziej „rozpłaszcza się” – wówczas $\widetilde{\pi}(x)$ jest bliskie π. Jako model Ziemi najczęściej przyjmuje się sferę lub elipsoidę obrotową, których powierzchnię lokalnie aproksymuje się płaszczyzną euklidesową styczną w danym punkcie. Dla wielu zastosowań jest to zabieg dopuszczalny, ponieważ wystarcza do otrzymania wymaganej dokładności wyników. Ale nie zawsze – w geodezji, nawigacji, kartografii czy astronomii znamy wiele przykładów, gdzie przybliżenie płaszczyzną nie wystarcza, a na obserwowanym obszarze wartość funkcji $\widetilde{\pi}$ istotnie różni się od π. W takich przypadkach granice aproksymacyjnego stosowania płaskiej geometrii euklidesowej należy wyraźnie określić.

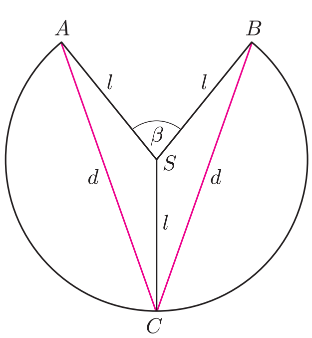


Rys. 3. Okrąg równoleżnikowy na stożku obrotowym i jego średnice.

Na przykład, w pomiarach terenowych – wykorzystywanych lokalnie w geodezji niższej – obszar powierzchni Ziemi można traktować jako płaski wtedy, gdy znajduje się on w kole o promieniu około 15,5 km (wówczas jego powierzchnia nie przekracza 760 km^2). Odpowiada to w przybliżeniu polu koła o średnicy równej $17'$ łuku okręgu wielkiego. Wyniki bezpośrednich pomiarów, nieuwzględniających wpływu krzywizny powierzchni Ziemi, wykonanych w takim obszarze, można przedstawić na płaszczyźnie w odpowiedniej skali, pomijając odwzorowanie kartograficzne, i efekt będzie satysfakcjonujący.

Zobaczmy teraz, jak zachowują się okręgi na stożku obrotowym. Stożek obrotowy to powierzchnia powstała przez obrót prostej $z = ay$ $(a > 0)$ nachylonej do osi y pod kątem $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ dokoła osi z w prostokątnym układzie współrzędnych $OXYZ$. Przyjmijmy, że $z \leqslant 0$, czyli patrzmy tylko na jedną część stożka, tę pod płaszczyzną $z = 0$ (rys. 3). Spróbujmy powiedzieć coś o zbiorze wartości funkcji $\widetilde{\pi}$, określonej, jak poprzednio, jako stosunek długości okręgu do długości jego średnicy.

Rozważmy rodzinę okręgów leżących na stożku, które powstają w wyniku przecięcia go płaszczyznami równoległymi do płaszczyzny $z = 0$. Okręgi te nazywamy, analogicznie jak na sferze, równoleżnikami. Punkt S, wierzchołek stożka, jest zarazem środkiem wszystkich okręgów równoleżnikowych. Intuicyjnie stwierdzamy, że powierzchnię boczną stożka obrotowego można otrzymać, zwijając kawałek papieru, czego z powierzchnią sfery zrobić się nie da. Spróbujmy więc spojrzeć na nasz problem, rozkładając powierzchnię boczną stożka na płaszczyźnie. Po tej operacji otrzymamy koło bez wycinka o kącie o mierze łukowej β, przedstawione na rysunku 4. Na tym samym rysunku widać okrąg na stożku, którego długość obliczymy. Niech l oznacza długość odcinka SA. Nasze obliczenia będą zależały od dwóch parametrów – odległości l okręgu od wierzchołka stożka oraz kąta β, charakteryzującego stożek.

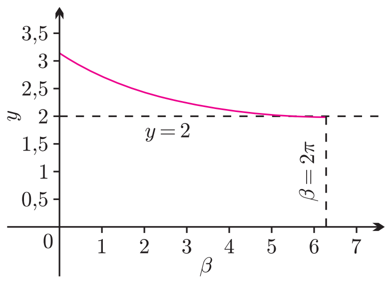


Rys. 4. Powierzchnia boczna stożka po rozwinięciu na płaszczyźnie. Kolorem zaznaczone są średnice narysowanego okręgu.

Długość pełnego okręgu na płaszczyźnie to $2\pi l$. Od niej trzeba odjąć długość łuku poza rozłożoną powierzchnią stożka, czyli $l\beta$. Wobec tego długość równoleżnika leżącego w odległości l od wierzchołka S jest równa

$$L(l, \beta) = l(2\pi - \beta).$$

Trudniejsza sprawa jest ze średnicami. Mogłoby się wydawać, że średnica takiego okręgu równoleżnikowego przechodzi przez punkt S – otóż nie! Na rysunku 4 widać, jak wyglądają najkrótsze odcinki (AC i BC) łączące przeciwległe punkty równoleżnika. Ich długość $d(l, \beta)$ wyznaczymy, korzystając z twierdzenia cosinusów



Rys. 5. Wykres funkcji $\widetilde{\pi}(\beta)$ dla okręgów równoleżnikowych stożka obrotowego.

dla trójkąta CSA:

$$d(l,\beta)^2 = AC^2 = AS^2 + CS^2 - 2AS\cdot CS\cdot\cos\left(\pi - \frac{\beta}{2}\right) = 2l^2\left(1+\cos\left(\frac{\beta}{2}\right)\right).$$

Teraz możemy obliczyć $\widetilde{\pi}$:

$$\widetilde{\pi}(l,\beta) = \frac{L(l,\beta)}{d(l,\beta)} = \frac{2\pi - \beta}{\sqrt{2\left(1+\cos\left(\frac{\beta}{2}\right)\right)}}.$$

Okazuje się, że wartość funkcji $\widetilde{\pi}$ nie zależy od l, czyli na każdym stożku wszystkie równoleżniki mają ten sam stosunek długości okręgu do średnicy. Ale ta liczba jest różna dla różnych stożków – zależy od kąta β. Funkcja, którą możemy zapisywać teraz jako $\widetilde{\pi}(\beta)$, przyjmuje wartości z przedziału $(2,\pi)$ dla $\beta \in (0, 2\pi)$.

Czytelnik Wnikliwy z pewnością zapyta, co się zmieni, jeśli uwzględnimy też okręgi, które nie są równoleżnikami. Czy nadal stosunek długości okręgu do średnicy będzie stały na każdym stożku? Można zacząć od takiego zadania: na powierzchni bocznej stożka obrotowego o ustalonym kącie β dany jest okrąg o promieniu $r' > 0$ i środku S' niebędącym wierzchołkiem stożka. Czy okrąg równoleżnikowy o takim samym promieniu ma taką samą długość? Lub ogólniej, czy jest prawdą, że na powierzchni bocznej stożka obrotowego dla dowolnej liczby $r > 0$ istnieje nieskończenie wiele okręgów o promieniu r, ale różnej długości?

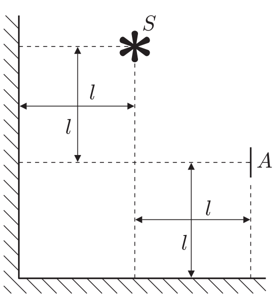
Obliczyliśmy, że funkcja $\widetilde{\pi}$ nie jest stała w ogólnym przypadku. Wobec tego nieostrożnie byłoby stwierdzić bez zastanowienia, że liczba π wyraża wartość stosunku długości okręgu do długości jego średnicy. Tak jest istotnie w geometrii euklidesowej na płaszczyźnie, do czego przyzwyczaja się nas niemal od początków nauki w szkole. Ale, jak widać, przenoszenie przyzwyczajeń z jednej, „ulubionej” geometrii na inne nie zawsze jest dobrym pomysłem.

W przedstawionych w artykule przykładach otrzymaliśmy wyłącznie wartości funkcji $\widetilde{\pi}$ nieprzekraczające π. Czy może się zdarzyć, że $\widetilde{\pi} > \pi$? Odpowiedzi proszę spróbować poszukać w geometrii hiperbolicznej.

Zadania

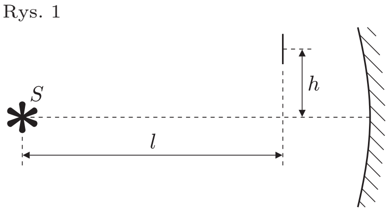
Redaguje Ewa CZUCHRY

F 777. Dwa zwierciadła płaskie tworzą kąt dwuścienny równy 90°. Punktowe źródło światła S zostało umieszczone między zwierciadłami tak, że odległość od nich jest równa odpowiednio l i $2l$ (rys. 1). W odległości $2l$ od pionowego zwierciadła jest umieszczony ekran. Znaleźć natężenie oświetlenia w punkcie ekranu A odległym od poziomego zwierciadła o l. Światłość źródła S wynosi I.
Rozwiązanie na str. 24



Rys. 1

F 778. Przed zwierciadłem sferycznym o promieniu r, w którego ognisku znajduje się punktowe źródło światła S, w odległości l od ogniska znajduje się mała nieprzezroczysta płytka (rys. 2). Powierzchnia płytki jest prostopadła do osi optycznej zwierciadła, a płytka znajduje się na niewielkiej wysokości h nad tą osią. Znaleźć stosunek oświetlenia lewej i prawej strony płytki.
Rozwiązanie na str. 12

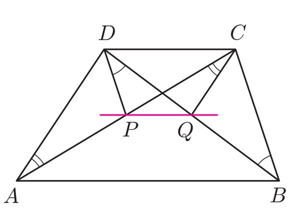


Rys. 2

Redaguje Waldemar POMPE

M 1297. Udowodnić, że w ciągu $2^n - 3$ występuje nieskończenie wiele liczb podzielnych przez 5 oraz nieskończenie wiele liczb podzielnych przez 13, lecz nie występuje w nim liczba podzielna przez $5\cdot 13$.
Rozwiązanie na str. 7

M 1298. Dane są trzy liczby nieparzyste a, b, c. Wykazać, że istnieje taka liczba nieparzysta d, że liczba $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ jest kwadratem liczby całkowitej.
Rozwiązanie na str. 3



Rys. 3

M 1299. Dany jest trapez $ABCD$ o podstawach AB i CD (rys. 3). Punkty P i Q leżą odpowiednio na przekątnych AC i BD, przy czym

$$\sphericalangle PDB = \sphericalangle CBD \quad \text{oraz} \quad \sphericalangle QCA = \sphericalangle DAC.$$

Wykazać, że prosta PQ jest równoległa do podstaw trapezu $ABCD$.
Rozwiązanie na str. 6