Istnienie

*Jarosław GÓRNICKI**

Gdy chcemy coś badać, rozsądnie jest upewnić się, że to coś istnieje.

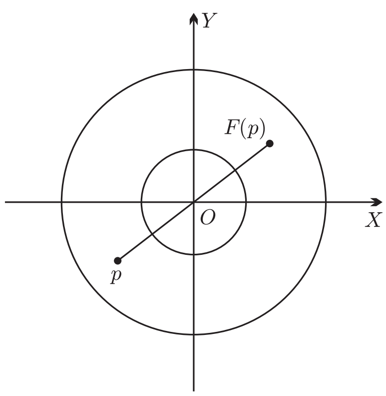
Euklides w III wieku p.n.e. pokazał, jak tworzyć matematyczną rzeczywistość na drodze aksjomatycznej. Istnieją, oczywiście, inne sposoby pomnażania matematycznych bytów i uzasadniania ich poprawności.

Problemy **istnienia** stanowią nieodłączną część matematyki i czasem wpływają na jej rozwój. Wystarczy przypomnieć historię poszukiwania odpowiedzi na pytania starożytnych Greków o istnienie konstrukcji platońskiej podwojenia sześcianu, kwadratury koła, trysekcji kąta. W podstawach matematyki niezłego zamieszania narobiły pytania o to, czy istnieje zbiór wszystkich zbiorów, czy istnieje zbiór złożony ze wszystkich zbiorów, które nie są swoimi elementami. Otwarte pytania w rodzaju – czy istnieje nieskończenie wiele par liczb pierwszych postaci p i $p+2$? – nadal inspirują matematyków.

Na początku XX wieku rozliczne zastosowania równań (różniczkowych, całkowych) skupiły uwagę na następujących problemach:

(1) Czy równanie ma rozwiązanie? Ile jest rozwiązań?
(2) Gdzie rozwiązania są zlokalizowane? Jaka jest ich struktura?
(3) Jak te rozwiązania wyznaczyć?

Odpowiedzią matematyków były dwa spektakularne twierdzenia o punktach stałych (*punkt stały* przekształcenia $F: M \to M$ to taki punkt $x \in M$, że $F(x) = x$). Sformułujemy je dla przestrzeni euklidesowych $(\mathbb{R}^n, d)$, gdzie d jest metryką. Należy podkreślić, że ten rezultat nie przenosi się do przestrzeni o nieskończonym wymiarze.



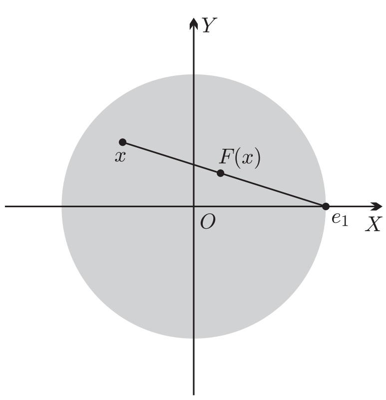
Rys. 1

Twierdzenie 1 (Luitzen Brouwer, 1911 r.). *Niech $B \subset \mathbb{R}^n$ będzie domkniętą kulą jednostkową. Każde przekształcenie ciągłe $F: B \to B$ ma punkt stały.*

Twierdzenie 2 (Stefan Banach, 1922 r.). *Przekształcenie $F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ nazywamy zwężającym, gdy istnieje taka stała $k \in [0,1)$, że dla wszystkich $x, y \in \mathbb{R}^n$ zachodzi*

$$d(F(x), F(y)) \leqslant k \cdot d(x,y).$$

Każde przekształcenie zwężające $F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ma dokładnie jeden punkt stały x^* i granicą iteracji funkcji F dla każdego $y \in \mathbb{R}^n$ jest właśnie ten punkt.



Rys. 2

Sformułowania tych twierdzeń są optymalne. Antypodyczne przekształcenie pierścienia $F(p) = -p$ (rys. 1), przekształcenie koła bez brzegu $F(x) = \frac{1}{2}(x + e_1)$ (rys. 2), izometria $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F(x) = x + 1$, przekształcenie $F(x) = n(1 + e^x)$, $x \in \mathbb{R}$, które spełnia warunek $d(F(x), F(y)) < d(x,y)$ dla $x \neq y$ (ale nie istnieje taka uniwersalna stała k, dla której byłby spełniony warunek z twierdzenia Banacha), nie mają punktów stałych.

Działanie tych twierdzeń pokażemy na szkolnych zadaniach.

Zadanie 1. Udowodnić zbieżność ciągu ułamków łańcuchowych

$$2, \quad 2 + \frac{1}{2}, \quad 2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2}}, \quad 2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2}}}, \quad \ldots$$

Rozważany ciąg zapisujemy rekurencyjnie: $x_1 = 2, x_n = 2 + \dfrac{1}{x_{n-1}}, n = 2, 3, \ldots$

*Katedra Matematyki, Politechnika Rzeszowska

Z oszacowań $x_1 \leqslant \frac{5}{2}$, $x_2 \leqslant \frac{5}{2}$ oraz z warunku

$$x_n = 2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{x_{n-2}}}, \qquad n = 3, 4, \ldots,$$

wynika, że $2 \leqslant x_n \leqslant \frac{5}{2}$ dla każdego $n = 1, 2, \ldots$

Ponieważ przekształcenie $F(x) = 2 + \frac{1}{x}$ odwzorowuje przedział $[2, \frac{5}{2}]$ w siebie i jest zwężające,

$$|F(x) - F(y)| = \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right| = \frac{1}{|xy|}|x - y| \leqslant \frac{1}{4}|x - y|,$$

więc na podstawie twierdzenia Banacha F ma dokładnie jeden punkt stały $x^* = \lim_{n\to\infty} x_n$, gdzie $x_n = F(x_{n-1}) = 2 + \frac{1}{x_{n-1}}$, $n \geqslant 2$. Rozwiązując równanie $x^* = 2 + \frac{1}{x^*}$, otrzymujemy $x^* = 1 + \sqrt{2}$.

Uwaga. Każda liczba niewymierna ma dokładnie jedno rozwinięcie na ułamek łańcuchowy arytmetyczny (wszystkie liczniki są równe 1) nieskończony:

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ldots}}} =: a_0 + 1/a_1 + 1/a_2 + 1/\ldots$$

Leonhard Euler wykazał, że

$$e = 2 + 1/1 + 1/2 + 1/1 + 1/1 + 1/4 + 1/1 + \ldots + 1/1 + 1/2k + 1/1 + /\ldots$$

Dla liczby π takie rozwinięcie nie jest znane! Wiadomo jedynie, jaka jest wartość a_k dla $k \leqslant 5\,821\,569\,425$ (Eric Weisstein, 2011 r.):

$$\pi = 3 + 1/7 + 1/15 + 1/1 + 1/292 + 1/1 + 1/1 + 1/2 + 1/3 + 1/1 + 1/14 + /\ldots$$

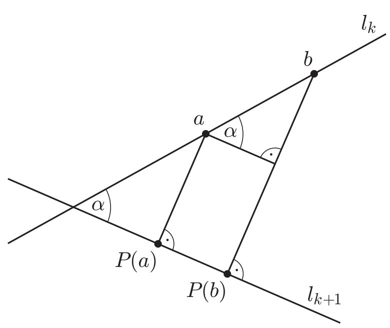
Od wiedzy, że „coś” istnieje, do wiedzy, jak to „coś” wygląda, droga czasem jest bardzo długa (jeśli w ogóle można ją przebyć).

Zadanie 2. Na płaszczyźnie euklidesowej danych jest $n \geqslant 2$ prostych $l_1, l_2, \ldots, l_n$. Niech $A_1 \in l_1$. Rzut prostopadły punktu A_1 na prostą l_2 wyznacza punkt $A_2 \in l_2$, rzut prostopadły punktu A_2 na prostą l_2 wyznacza punkt $A_3 \in l_3$, itd. Rzut prostopadły punktu $A_n \in l_n$ na prostą l_1 wyznacza punkt $A_{n+1} \in l_1$. Czy istnieje taki punkt $A_1 \in l_1$, że $A_1 = A_{n+1}$?

Jeśli proste $l_1, l_2, \ldots, l_n$ są równoległe, to każdy punkt $A_1 \in l_1$ spełnia warunki zadania. Gdy istnieje para kolejnych prostych l_k i l_{k+1}, które nie są równoległe, to rzutowanie prostopadłe l_k na l_{k+1} jest przekształceniem zwężającym (rys. 3)

$$|P(a) - P(b)| = |a - b| \cdot \cos\alpha.$$

W tym przypadku przekształcenie $F : l_1 \to l_1$, opisane w zadaniu, jest zwężające ze stałą $k = \cos\gamma$, gdzie $\gamma \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ jest miarą jednego z kątów między dwiema kolejnymi nierównoległymi prostymi. Zatem na podstawie twierdzenia Banacha istnieje taki punkt $A_1 \in l_1$, że $A_1 = A_{n+1}$.



Rys. 3

Kolejne zadanie jest (chyba?) trudniejsze. Skoro łatwo wskazać przekształcenie ciągłe koła z dziurą (pierścienia) na siebie bez punktu stałego, to dla koła z większą liczbą dziur...

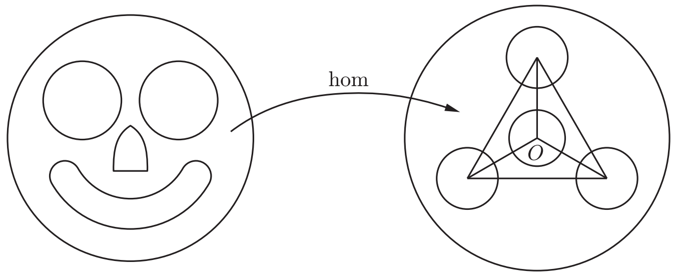
Zadanie 3. Niech D_n oznacza figurę domkniętą otrzymaną z koła, w którym zrobiono $n \geqslant 2$ dziur (rys. 4). Wskazać przekształcenie ciągłe zbioru D_n na siebie bez punktu stałego.

Rys. 4

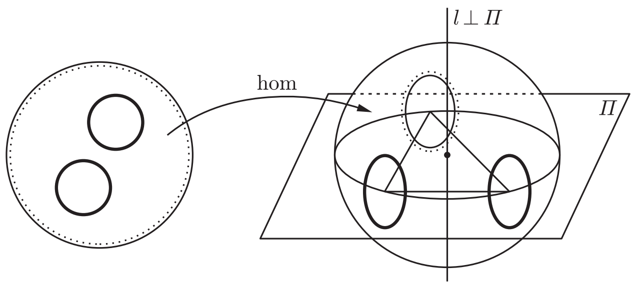
Rozwiązanie jest na odwrocie tej kartki, ale najpierw spróbuj rozwiązać je sam.

* * *

Zastosowania twierdzeń Brouwera i Banacha w zaawansowanych działach matematyki, m.in. w teorii równań różniczkowych, całkowych, przyczyniły się do pojawienia się kolejnych wyników Juliusza Schaudera, Solomona Lefschetza, Karola Borsuka i wielu innych. Doprowadziło to do powstania użytecznej teorii punktów stałych, na którą dzisiaj można patrzeć z topologicznego lub metrycznego punktu widzenia.



Rys. 5



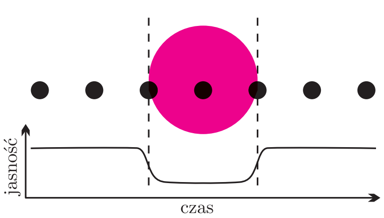
Rys. 6

Rozwiązanie zadania 3. Oznaczmy przez O środek koła D_n. Jeżeli $n \geqslant 3$, to za sprawą przekształcenia homeomorficznego możemy przyjąć, że dziury są kołami tej samej wielkości, środek jednego z nich pokrywa się ze środkiem koła D_n, a środki pozostałych $(n-1)$ kół (= dziur) rozmieszczone są symetrycznie względem punktu O lub są wierzchołkami $(n-1)$−kąta foremnego (rys. 5). Obrót figury D_n wokół punktu O o kąt $\frac{2\pi}{n-1}$ przekształca w sposób ciągły figurę D_n na siebie i przemieszcza każdy punkt figury D_n.

Gdy dziury są dwie, możemy postąpić inaczej. Figurze D_2 nadajemy kształt sfery (rys. 6) z trzema kolistymi dziurami tej samej wielkości, których środki znajdują się na równiku i leżą w wierzchołkach trójkąta równobocznego (ponownie korzystamy z przekształceń homeomorficznych). Tak otrzymana powierzchnia jest symetryczna względem płaszczyzny równika Π. Złożenie symetrii względem płaszczyzny Π z obrotem sfery o kąt $\frac{2\pi}{3}$ wokół osi $l \perp \Pi$ i przechodzącej przez środek sfery przekształca figurę D_2 na siebie, przemieszczając jej każdy punkt.

Odkryj własną egzoplanetę

*Jakub BOCHIŃSKI**



Rys. 1. Podczas zaćmienia dysk planety zasłania część gwiazdy, co powoduje czasowe zmniejszenie jasności gwiazdy.

Zaćmienia Słońca towarzyszą nam od zarania dziejów. Już w czwartym wieku przed naszą erą chiński astronom Shi Shen zauważył, że da się powiązać je z pozycją Księżyca na niebie i tym sposobem przewidywać tego rodzaju wydarzenia. W dzisiejszych czasach zaćmienia odległych gwiazd pomagają astronomom w poszukiwaniu i badaniach ciał niebieskich poza Układem Słonecznym.

W trakcie zaćmienia dysk planety (lub innego ciała niebieskiego) zasłania część macierzystej gwiazdy, zmniejszając czasowo jej obserwowaną jasność. Jako że większość ciał niebieskich krąży po stałych orbitach, zaćmienia te powinny być obserwowalne w stałych odstępach czasowych. Oczywiście, żeby zaćmienie w ogóle mogło mieć miejsce, gwiazda macierzysta, orbita poszukiwanej planety i nasza Ziemia muszą znajdywać się w jednej płaszczyźnie. Szanse na taką konfigurację są niskie (około 10% dla większości gorących Jowiszów i mniej niż 1% dla planety takiej jak Ziemia), więc naukowcy szukający egzoplanet metodą zaćmieniową obserwują tysiące gwiazd jednocześnie, by zwiększyć szansę dokonania odkrycia.

Jedna z pierwszych odkrytych planet pozasłonecznych, 51 Pegasi b, znaleziona w 1995 roku przez Michaela Mayora i Didier Queloza z Obserwatorium Genewskiego, okazała się gazowym gigantem o temperaturze powierzchniowej ponad dwukrotnie wyższej niż na jakiejkolwiek planecie w Układzie Słonecznym (ponad 1500 K), obiegającym podobną do Słońca gwiazdę 51 Pegasi w ciągu zaledwie 4 dni. W późniejszych latach znaleziono więcej tego rodzaju planet i ukuto dla nich wspólną kategorię „gorących Jowiszów".

Dotychczas metoda zaćmieniowa przyczyniła się do odkrycia ponad 300 egzoplanet. Większość odkryć została dokonana przez zaledwie dwie grupy naukowców: jedna związana jest z amerykańską sondą kosmiczną Kepler, a druga z europejskim konsorcjum uniwersytetów SuperWASP. Obie grupy starają się obserwować możliwie dużą liczbę gwiazd jednocześnie, choć wykorzystują do tego zupełnie różne techniki. Kepler koncentruje się na jednym fragmencie nieba, obserwując 150 tysięcy gwiazd wzdłuż galaktycznego Ramienia Oriona (w którym leży też nasze Słońce), aż do odległości około 3000 lat świetlnych od Ziemi. SuperWASP zbiera dane, korzystając z szesnastu małych teleskopów umiejscowionych w dwóch grupach na północnej i południowej półkuli Ziemi. Obie grupy teleskopów, pracując wspólnie, są w stanie sfotografować całe nocne niebo w ciągu zaledwie siedmiu minut, obserwując setki tysięcy jasnych gwiazd do odległości około 1000 lat świetlnych. W żargonie astronomicznym pierwsza grupa naukowców szuka planet „wąsko i głęboko" a druga „szeroko i płytko".

*doktorant w grupie egzoplanetarnej, Open University w Milton Keynes, Wielka Brytania