deltoid 36

Środek ciężkości II

Joanna JASZUŃSKA

Tematem poprzedniego *deltoidu* był środek ciężkości i związane z nim zadania. W tym numerze pora na zastosowania środka ciężkości w problemach pozornie z nim niezwiązanych. Na marginesie przypominamy podstawowe fakty.

1. Udowodnij, że w dowolnym czworościanie odcinki łączące środki przeciwległych krawędzi przecinają się w jednym punkcie.

2. Na bokach AD i BC czworokąta wypukłego $ABCD$ wybrano takie punkty K, L, że $AK : KD = CL : LB$. Wykaż, że środki P, Q, R odcinków AC, BD, KL są współliniowe (rys. 1).

3. Podstawą ostrosłupa $ABCDP$ jest równoległobok $ABCD$. Punkty P_B, P_C, P_D na krawędziach PB, PC, PD spełniają warunki: $PP_B : P_BB = 1 : 3$, $PP_C : P_CC = 1 : 4$, $PP_D : P_DD = 1 : 2$. Płaszczyzna $P_BP_CP_D$ przecina krawędź PA w punkcie P_A. Wyznacz $PP_A : P_AA$ (rys. 2).

4. Okrąg wpisany w trójkąt ABC jest styczny do boków BC, CA, AB odpowiednio w punktach D, E, F. Punkt M jest środkiem boku BC, zaś odcinki AM i EF przecinają się w punkcie G. Wykaż, że proste GD i BC są prostopadłe (rys. 3).

Fakt 1. *Dla punktów $X_1, \ldots, X_n$ z masami odpowiednio $m_1, \ldots, m_n$ o niezerowej sumie, istnieje dokładnie jeden środek ciężkości*

$$S = S(X_1, \ldots, X_n) = S((X_1, m_1), \ldots, (X_n, m_n))$$

i jedynie on spełnia warunek

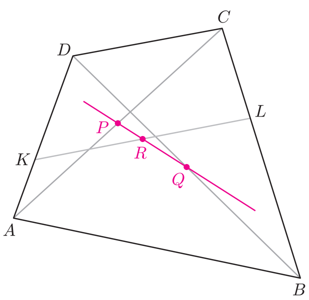
$$m_1 \cdot \overrightarrow{SX_1} + \ldots + m_n \cdot \overrightarrow{SX_n} = \overrightarrow{0}.$$

W szczególności S to jedyny taki punkt na prostej X_1X_2, że

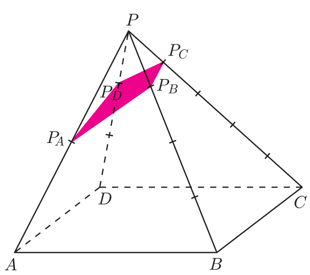
$$\overrightarrow{X_1S} : \overrightarrow{SX_2} = m_2 : m_1.$$

Uwaga: ujemne masy można interpretować jako baloniki z helem.

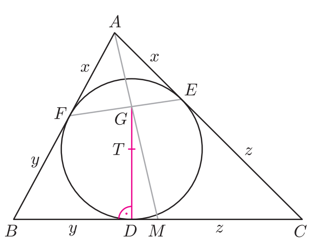
Fakt 2. *Jeśli część spośród rozważanych punktów zastąpić ich środkiem ciężkości z masą równą sumie ich mas, to środek ciężkości całego układu nie zmieni się.*



Rys. 1



Rys. 2



Rys. 3. Zadanie i rozwiązanie pochodzą z obozu LXI Olimpiady Matematycznej.

Rozwiązania

R1. Umieśćmy w wierzchołkach czworościanu równe masy. Każdy odcinek łączący środki przeciwległych krawędzi łączy środek ciężkości dwóch mas ze środkiem ciężkości pozostałych dwóch, przechodzi więc przez środek ciężkości ich wszystkich. □

R2. Umieśćmy w punktach A i C masy x, a w B i D masy y takie, by $S((A, x), (D, y)) = K$ (da się takie masy dobrać). Wtedy $S((B, y), (C, x)) = L$. Wobec tego $S(A, B, C, D) = S((K, x + y), (L, x + y)) = R$. Jednocześnie $S(A, C) = P$ oraz $S(B, D) = Q$, więc $R = S(A, B, C, D) = S((P, 2x), (Q, 2y)) \in PQ$. □

R3. Umieśćmy w punktach B, C, D masy odpowiednio $1, -1, 1$, a w punkcie P trzy masy: $m_B = 3$, $m_C = -4$ i $m_D = 2$. Wtedy $S((P, m_X), X) = P_X$ dla $X = B, C, D$, więc środek ciężkości S układu B, C, D, P leży na płaszczyźnie $P_BP_CP_D$.

Ponadto $S((B, 1), (C, -1), (D, 1)) = A$, bo $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{0}$. Skoro $1 - 1 + 1 = 1$ oraz $m_B + m_C + m_D = 3 - 4 + 2 = 1$, to $S = S((A, 1), (P, 1))$ jest środkiem odcinka PA. Stąd i z wcześniejszego $S \in P_BP_CP_D$ wynika $S = P_A$ i $PP_A : P_AA = 1 : 1$. □

R4. Niech $AE = AF = x$, $BD = BF = y$, $CD = CE = z$. Umieśćmy w A, B, C odpowiednio masy $y + z, x, x$ i wyznaczmy środek ciężkości S tego układu. $S((A, y), (B, x)) = F$, $S((A, z), (C, x)) = E$, więc S leży na prostej EF. Jednocześnie $S((B, x), (C, x)) = M$, więc S leży też na prostej AM. Stąd $S = G$.

Umieśćmy teraz dodatkowo masę z w punkcie B i masę y w punkcie C, wtedy $S((B, z), (C, y)) = D$. Niech T będzie środkiem ciężkości „starych" i „nowych" mas, wtedy T leży na prostej GD łączącej ich środki ciężkości.

Z twierdzenia o dwusiecznej, $S((B, x + z), (C, x + y))$ jest jej spodkiem dla $\sphericalangle BAC$. Leży więc na niej punkt $T = S((A, y + z), (B, x + z), (C, x + y))$. Analogicznie leży on też na pozostałych dwusiecznych kątów trójkąta, jest zatem środkiem okręgu wpisanego. Stąd $TD \perp BC$, co kończy dowód. □

Zadania domowe

5. Wykaż, że w dowolnym czworokącie odcinki łączące środki przeciwległych boków oraz odcinek łączący środki przekątnych przecinają się w jednym punkcie.

6. Czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg o środku O. Przekątne AC i BD są prostopadłe i przecinają się w punkcie T. Udowodnij, że punkt przecięcia odcinków łączących środki przeciwległych boków jest środkiem odcinka OT.

7. Punkty D, E, F należą odpowiednio do boków BC, CA, AB trójkąta ABC, proste AD, BE, CF przecinają się w punkcie P. Wykaż, że $\frac{AE}{EC} + \frac{AF}{FB} = \frac{AP}{PD}$.

Wskazówka. Umieśćmy w A, B, C takie masy x, y, z, by $P = S((A, x), (B, y), (C, z))$ (czy zawsze się da?). Wtedy $E = S((A, x), (C, z))$ (bo $P \in BE$), zatem $AE/EC = z/x$ i analogicznie $AF/FB = y/x$.

Zadanie 7 to twierdzenie van Aubela. Inny dowód opisano w *deltoidzie* 3/2011.