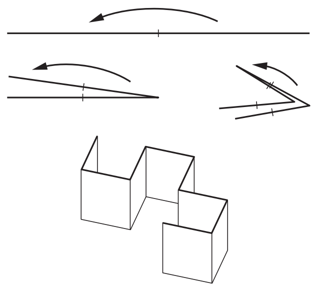
Fraktalny świat papierowej tasiemki

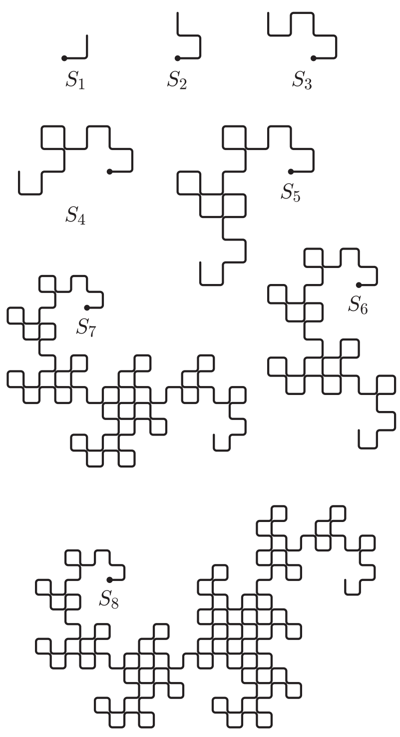
Tomasz IDZIASZEK



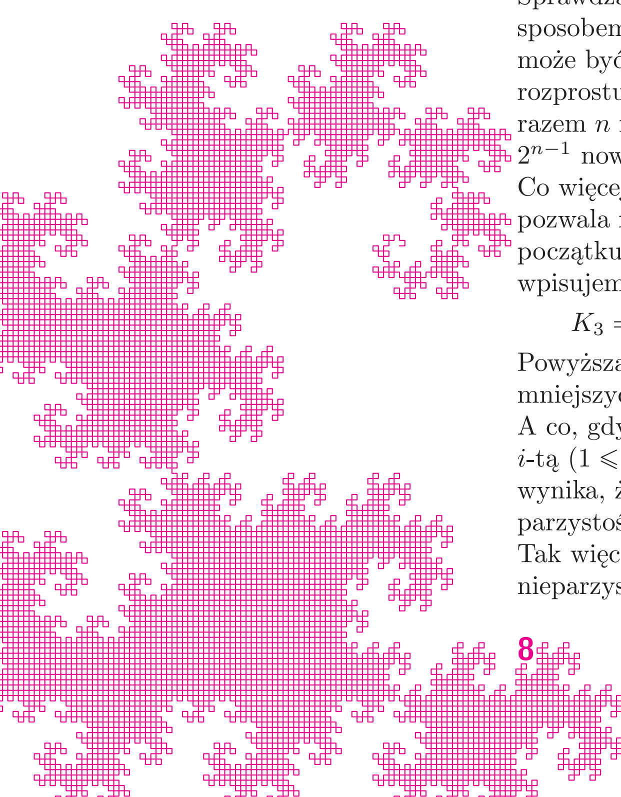
Rys. 1. Składanie paska papieru.

Weźmy długi pasek papieru i złóżmy go na pół. Następnie, nie rozkładając, złóżmy go w tę samą stronę jeszcze dwa razy. W końcu, rozprostujmy złożenia tak, by papier zginał się pod kątem 90°. Otrzymamy obiekt jak na rysunku 1.

Jeśli przerysujemy kształt, który przyjmuje górna krawędź tasiemki, dostaniemy ciekawą krzywą. Gdy złożymy papier nie trzy, ale cztery lub więcej razy, krzywa, jaką otrzymamy, stanie się bardziej złożona (rys. 2). Coraz bardziej przypominać będzie brodzącego w wodzie smoka, stąd też jej nazwa – *smocza krzywa*. Po raz pierwszy była badana w roku 1966 przez fizyków z NASA: Johna Heighwaya i Williama Hartera. Do jej popularyzacji przyczynili się Martin Gardner w swoich *Grach Matematycznych* oraz pisarz Michael Crichton: jeden z bohaterów jego powieści *Park Jurajski*, specjalizujący się w teorii chaosu matematyk Ian Malcolm, ilustrował za pomocą smoczej krzywej swoje przemyślenia na temat przyszłości tak skomplikowanych przedsięwzięć, jak wskrzeszanie wymarłych gadów. Swoją drogą, krzywa S_8 równie dobrze jak smoka przypomina dinozaura.



Rys. 2. Rodzina smoczych krzywych; S_n jest krzywą rzędu n. Poniżej fragment S_{14}.



Jeśli całkowicie rozprostujemy tasiemkę, to na jej powierzchni dostrzeżemy rowki i górki. Odpowiadają one zakrętom, które będziemy brać, jeśli poczynając od wyróżnionego końca krzywej, będziemy ją rysować ołówkiem: rowek to zakręt w lewo (L), górka – w prawo (P). Jeśli zgięliśmy papier n razy, wskutek czego otrzymaliśmy krzywą rzędu n, to zrobimy $2^n - 1$ zakrętów. Oznaczmy przez K_n słowo składające się z liter L i P, opisujące ciąg zakrętów na krzywej rzędu n. Mamy:

$$K_1 = \texttt{L}, \qquad K_2 = \texttt{LLP}, \qquad K_3 = \texttt{LLPLLPP}.$$

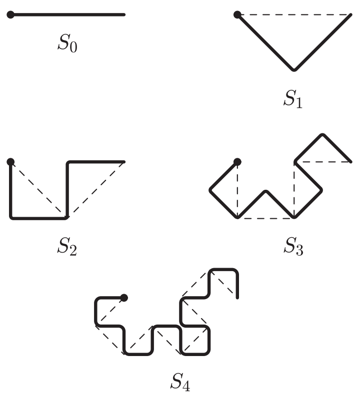
Ponieważ nasze możliwości składania papieru są dość ograniczone, spróbujmy znaleźć jakąś regułę opisującą słowo K_n, która pozwoli nam rysować dowolnie duże krzywe bez konieczności proszenia o pomoc specjalisty od origami. Złóżmy tasiemkę n razy, a następnie rozprostujmy ostatnie $n-1$ złożeń. Na powierzchni widzimy $2^{n-1}-1$ zagięć, które powstały ze złożenia paska $n-1$ razy, zatem opisuje je słowo K_{n-1}. Jeśli rozprostujemy pasek papieru n-ty raz, to będą one pierwszymi zagięciami, zatem słowo K_n zawsze zaczyna się od K_{n-1}. Zauważmy ponadto, że rowki na jednej połówce papieru odpowiadają górkom na drugiej połówce i vice versa. Innymi słowy, jeśli i-tym zagięciem (dla $1 \leqslant i < 2^{n-1}$) w K_n jest rowek, to i-tym zagięciem *od końca* będzie górka. Wprowadźmy operację r, która odwraca kolejność liter w słowie i jednocześnie zamienia litery L z P, dla przykładu $r(K_2) = \texttt{LPP}$. Wtedy

$$K_n = K_{n-1}\ \texttt{L}\ r(K_{n-1}).$$

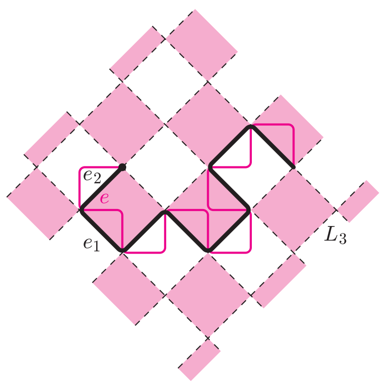
Sprawdzamy, że istotnie $K_2 = K_1\ \texttt{L}\ r(K_1) = \texttt{L L P}$ oraz $K_3 = \texttt{LLP L}\ r(\texttt{LLP})$. Tym sposobem uzyskaliśmy rekurencyjny wzór na słowo K_n. Okazuje się jednak, że może być ono opisane również w inny sposób. Złóżmy pasek papieru $n-1$ razy, rozprostujmy go, a następnie pomalujmy zagięcia. Następnie złóżmy go znowu, tym razem n razy, i rozprostujmy. Zauważmy, że n-te złożenie spowodowało powstanie 2^{n-1} nowych zagięć, które pojawiły się pomiędzy pomalowanymi zagięciami. Co więcej, nowe zagięcia występują regularnie: na przemian rowek i górka. To pozwala nam wyprowadzić nowy wzór: aby uzyskać K_n, wstawiamy puste pola na początku i na końcu słowa K_{n-1} oraz między jego kolejnymi literami. Następnie wpisujemy w puste pola na przemian litery L i P. Zatem K_4 powstaje następująco:

$$K_3 = \texttt{LLPLLPP} \quad\rightarrow\quad \texttt{\_L\_L\_P\_L\_L\_P\_P\_} \quad\rightarrow\quad \underline{\texttt{L}}\texttt{L}\underline{\texttt{P}}\texttt{L}\underline{\texttt{L}}\texttt{P}\underline{\texttt{P}}\texttt{L}\underline{\texttt{L}}\texttt{L}\underline{\texttt{P}}\texttt{P}\underline{\texttt{L}}\texttt{P}\underline{\texttt{P}} = K_4.$$

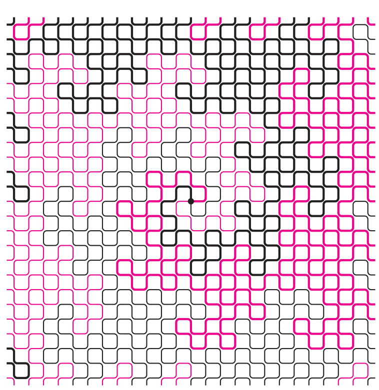
Powyższa metoda jest również rekurencyjna (tzn. odwołuje się do słów dla mniejszych krzywych), ponadto obie metody konstruują słowa w całości.
A co, gdybyśmy chcieli mieć wzór na i-ty zakręt na krzywej rzędu n, tzn. na i-tą ($1 \leqslant i < 2^n$) literę słowa K_n? To proste: z tego, co powiedzieliśmy, wynika, że jeśli i jest nieparzyste, to tą literą jest L lub P w zależności od parzystości $(i-1)/2$. W przeciwnym przypadku jest to litera $i/2$ w słowie K_{n-1}. Tak więc jeśli p jest największą potęgą dwójki dzielącą i, czyli $i = 2^p m$ dla nieparzystego m, to szukaną literą jest L wtedy, gdy $(m-1)/2$ jest parzyste.



Rys. 3. Proces budowania krzywej S_n (linia ciągła) na krzywej S_{n-1} (linia przerywana).



Rys. 4. Siatka L_3 pomalowana w „szachownicę”. Na czarno zaznaczono krzywą S_3, kolorem – krzywą S_4.



Rys. 5. Cztery nieskończone smocze krzywe wypełniające płaszczyznę.

Bibliografia

[1] Gerald Edgar, *Measure, Topology, and Fractal Geometry*, Springer, 2008.

[2] Chandler Davis, Donald Knuth, *Number Representations and Dragon Curves*, Journal of Recreational Mathematics 3 (1970), 66–81, 133–149. Także w: Donald Knuth, *Selected Papers on Fun and Games*, CSLI Publications, 2011.

Ponieważ słowo K_n zawsze zaczyna się od K_{n-1}, więc krzywą rzędu n możemy narysować, przedłużając krzywą rzędu $n-1$. Z tego wynika naturalna konstrukcja *nieskończonej smoczej krzywej*, która odpowiada słowu

$$K_\infty = \texttt{L LP LLPP LLLPPLPP LLLPLLPPPLLPPLPP} \ldots$$

Rysując smoczą krzywą coraz wyższych rzędów, dostrzeżemy jej zaskakującą własność: krzywa ta nie ma samoprzecięć! Co więcej, o ile będziemy pamiętali, by na każdym zakręcie robić mały łuk, to krzywa ta żadnego punktu nie odwiedza dwa razy. Zanim udowodnimy, że jest tak w istocie, spójrzmy na jeszcze jeden sposób, w jaki możemy otrzymać smoczą krzywą. Zacznijmy od odcinka o długości 1, który jest smoczą krzywą rzędu 0; oznaczmy go przez S_0 (rys. 3). Teraz zbudujmy na tym odcinku trójkąt prostokątny równoramienny, dorysowując dwa odcinki o długościach $1/\sqrt{2}$. Te przyprostokątne tworzą krzywą rzędu 1. I dalej: na krzywej S_{n-1} dobudowujemy 2^{n-1} trójkątów, naprzemiennie po prawej i lewej stronie krzywej – w ten sposób uzyskujemy S_n. Zauważmy, że choć krzywa S_n składa się z 2^n kawałków, to jej długość wynosi $(\sqrt{2})^n$, gdyż odcinki kolejnych rzędów są $\sqrt{2}$ razy krótsze. Jeśli będziemy wykonywać tę operację dalej, to w granicy otrzymamy nieskończonej długości fraktalną krzywą zwaną *smokiem Heighwaya*. Smoczą krzywą możemy więc traktować jako aproksymację smoka.

Teraz już jesteśmy gotowi do dowodu faktu, że smocza krzywa nie ma samoprzecięć. Dowód przytaczamy za Geraldem Edgarem [1]. Narysujmy krzywą S_n na kwadratowej siatce L_n o długości krawędzi $(1/\sqrt{2})^n$. Każdy odcinek krzywej pokrywa się z jedną krawędzią siatki. Ponadto pomalujmy kwadraty siatki L_n w „szachownicę” (rys. 4). Zauważmy, że gdy konstruujemy krzywą S_{n+1}, to rysujemy trójkąty naprzemiennie na kolorowych i białych kwadratach. Ponadto wszystkie trójkąty konstruowane na kolorowych polach pochodzą od odcinków S_n równoległych do jednej z osi siatki L_n, a trójkąty konstruowane na białych polach pochodzą od odcinków równoległych do drugiej osi.

Ponieważ w każdym wierzchołku siatki krzywa ma kąt prosty (który, być może, dotyka drugiego kąta prostego w tym wierzchołku), zatem aby uzyskać samoprzecięcie, któraś z krawędzi siatki musiałaby należeć do krzywej dwukrotnie jako jej odcinek. Załóżmy zatem, że w S_n nie ma takiego odcinka; pokażemy, że wynika z tego, iż w S_{n+1} również takiego nie ma. Niech P będzie dowolnym kwadratem w siatce L_n, e – krawędzią siatki L_{n+1} wewnątrz P, a e_1 i e_2 – krawędziami siatki L_n o wspólnym wierzchołku z e. Krzywa S_n odwiedza każdą z krawędzi e_1, e_2 co najwyżej raz, a krzywa S_{n+1} odwiedza krawędź e dokładnie raz dla każdego trójkąta skonstruowanego na e_1 lub e_2. Ale ponieważ te dwie krawędzie są prostopadłe, wobec tego tylko na jednej z nich możemy zbudować trójkąt w kwadracie P – na tej, która jest kompatybilna z kolorem kwadratu P. To kończy dowód.

Równie ciekawy jest fakt następujący: jeśli narysujemy cztery nieskończone smocze krzywe mające swoje początki w tym samym punkcie, ale obrócone o wielokrotności 90°, to nie tylko nie będą się one ze sobą przecinać, ale, co więcej, pokryją całą płaszczyznę (tzn. każda jednostkowa krawędź siatki będzie należeć do jednej z krzywych; rys. 5). Dowód tego faktu jest trudniejszy – zainteresowanych Czytelników odsyłamy do artykułu Chandlera Davisa i Donalda Knutha [2], opisującego zaskakujące związki smoczych krzywych z systemami pozycyjnymi o podstawie zespolonej. Swoją drogą, Knuth, jako prawdziwy fan smoczej krzywej, ma w domu na ścianie krzywą S_9 ułożoną z 986 własnoręcznie wypalonych ceramicznych kafelków.

Czytelnik, który zapoznał się z artykułem Krzysztofa Barańskiego w tym numerze, może pokusić się o obliczenie wymiaru fraktalnego smoka Heighwaya. Jak pokazaliśmy, smocza krzywa ma strukturę rekurencyjną: składa się z dwóch krzywych mniejszych rzędów. Tak więc na S_n składają się dwie kopie S_{n-1} przeskalowane o czynnik $1/\sqrt{2}$. Z tego wynika podobna własność smoka Heighwaya: jest on sumą dwóch swoich kopii o rozłącznych wnętrzach, przy podobieństwie o skali $s = 1/\sqrt{2}$ (patrz okładka). To powoduje, że wymiar smoka w musi spełniać równanie $2(1/\sqrt{2})^w = 1$, zatem wynosi $w = 2$. Miłośników parkietaży ucieszy zapewne fakt, że smokiem można pokryć płaszczyznę – i to na wiele sposobów!