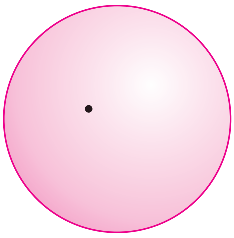
Wzór Eulera i balony

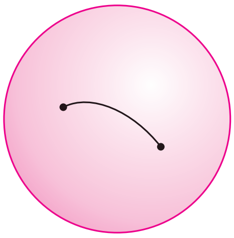
Witold SADOWSKI[*]



Rys. 1

Polski namiot na francuskim Festiwalu Nauki był tak pełen gości, że miejsce dla jego matematycznej części życzliwie zostało ofiarowane przez Jeana Brette'a i jego kolegów w namiocie Pałacu Odkryć. W ten sposób młodzi Francuzi odwiedzający namiot matematyczny nie tylko rozwiązywali łamigłówki, ale też nadmuchiwali balony z polskimi emblematami, rysowali na nich kropki oraz kreski i poznawali genialne odkrycie Kartezjusza i Eulera.

Małe baloniki. Narysujmy na baloniku kropki i kreski, trzymając się następujących reguł:



Rys. 2

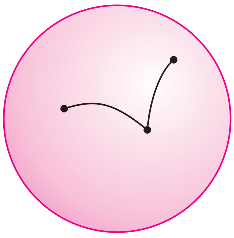
- końce każdej z kresek oznaczone są kropkami;
- każde dwie kropki połączone są linią złożoną z kresek;
- kreski się nie przecinają.

W trakcie rysowania powstają zazwyczaj na baloniku ograniczone kreskami pola. W dalszym ciągu interesować nas będzie, ile wynosi wartość następującego wyrażenia:

$$E = (\text{liczba kropek}) - (\text{liczba kresek}) + (\text{liczba pól}).$$

Narysujmy najpierw jedną kropkę na baloniku (rys. 1) i obliczmy E. Mamy oczywiście jedną kropkę, jedno duże pole (powierzchnia balonu) i zero kresek, więc

$$E = 1 - 0 + 1 = 2.$$



Rys. 3

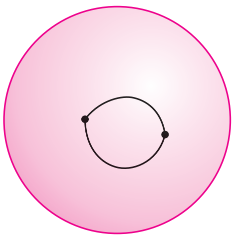
Rysujemy dalej. Możemy teraz tylko dorysować kreskę i zakończyć ją kropką (rys. 2). Wartość liczby E nie zmieni się:

$$E = (1 + 1) - 1 + 1 = 2.$$

Następnie

- albo znów dorysujemy kreskę z nową kropką na końcu (rys. 3) i wartość E nie zmieni się, bo wtedy

$$E = \underbrace{(1+1+1)}_{\text{kropki}} - \underbrace{(1+1)}_{\text{kreski}} + \underbrace{(1)}_{\text{pola}} = 2,$$



Rys. 4

- albo dorysujemy kreskę ze starą kropką na końcu (rys. 4) i wtedy też wartość E nie ulegnie zmianie, gdyż powstanie nowe pole i otrzymamy

$$E = \underbrace{(1+1)}_{\text{kropki}} - \underbrace{(1+1)}_{\text{kreski}} + \underbrace{(1+1)}_{\text{pola}} = 2.$$

Łatwo uwierzyć, że jakkolwiek byśmy kombinowali, to trzymając się reguł gry, nie zmienimy wartości liczby E. Z naszych rozważań wynika zatem następujące

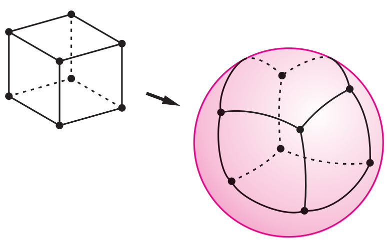
Twierdzenie. Jeżeli spójny („jednokawałkowy") rysunek złożony z K kresek i W kropek na końcach kresek namalowany na baloniku wycina na nim S pól, to liczba

$$E = W - K + S$$

jest równa 2.

Średnie baloniki. Weźmy teraz do ręki model sześcianu, czworościanu czy dwudziestościanu foremnego i zliczmy jego ściany, wierzchołki i krawędzie. Następnie obliczmy tzw. liczbę Eulera

$$(*) \qquad E = (\text{liczba wierzchołków}) - (\text{liczba krawędzi}) + (\text{liczba ścian}).$$

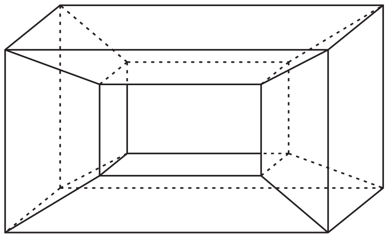


Rys. 5

W każdym przypadku $E = 2\ldots$ Teraz zaczyna być jasne, że liczba E ze średnich i małych baloników to ta sama „osoba", a nie kolizja oznaczeń... Dlaczego? Zauważmy, że gdyby nasze modele wielościanów (dokładniej: modele powierzchni wielościanu) zrobione były z odpowiedniej gumy, to po nadmuchaniu takiego wielościanu (rys. 5) uzyskalibyśmy balon z rysunkiem złożonym z kropek (wierzchołków), kresek (krawędzi) i pól (ścian). Z poprzedniego twierdzenia uzyskujemy zatem natychmiast nowe twierdzenie o wielościanach.

Czy jednak rzeczywiście wzór $E = 2$ (zwany wzorem Eulera) jest słuszny dla każdego wielościanu?

[*]Instytut Matematyki Stosowanej, Uniwersytet Warszawski

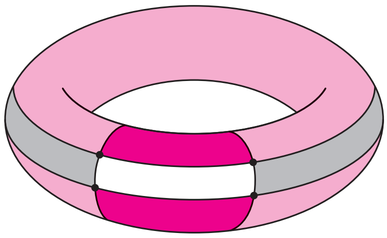


Rys. 6

Rozważmy wielościan w kształcie ramy obrazu (rys. 6). Mamy tutaj 16 ścian (8 prostokątów i 8 trapezów), 16 wierzchołków i 32 krawędzie. A zatem

$$E = 16 - 32 + 16 = 0\ldots$$

No i klęska... Nasze twierdzenie jest fałszywe?! Niezupełnie. Zauważmy bowiem, że nadmuchując gumową ramę obrazu nie uzyskamy zwykłego „sferycznego” balonika, ale gumową dętkę. Na gumowej dętce nie da się już jednak przeprowadzić takiego samego dowodu jak ten z „małych baloników” (patrz rys. 7).

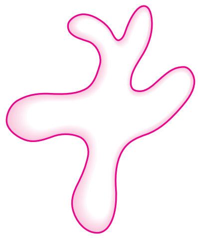


Rys. 7

Z drugiej strony ograniczając się tylko do wypukłych wielościanów, których powierzchnia po nadmuchaniu na pewno jest „sferycznym” balonikiem, uzyskamy

Twierdzenie Eulera. Dla każdego wypukłego wielościanu liczba Eulera zdefiniowana w równaniu (∗) jest równa 2.

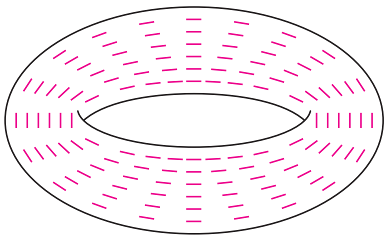
Duże baloniki. Przykład z dętką rowerową nie powinien nikogo zniechęcać. Wręcz przeciwnie: odkryliśmy, że jest coś, co łączy wszystkie wielościany, których powierzchnia po nadmuchaniu staje się „sferycznym balonikiem”. Jest to jakaś magiczna cecha, która odróżnia te wielościany od innych, których powierzchnia po nadmuchaniu staje się np. gumową dętką. Co więcej, to nie w naturze wielościanu, ale w naturze balonika leży klucz do sekretu. A przecież „sferyczny balonik” może przybierać bardzo różne kształty (rys. 8), zależnie od tego, jak go ściśniemy. Dla każdego z tych kształtów będzie jednak spełniony wzór Eulera! Ta obserwacja prowadzi nas do klasyfikacji baloników ze względu na odpowiadającą im liczbę Eulera. Łatwo znajdziemy te, dla których liczba Eulera jest równa 2, 0, -2, -4 itd...



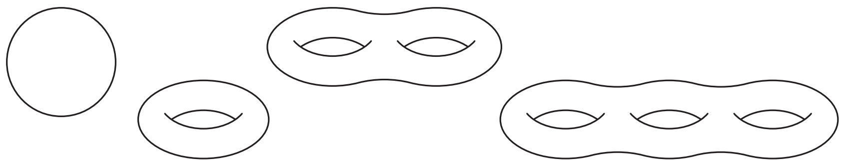
Rys. 8

I oto jesteśmy o krok od fundamentalnego wyniku.

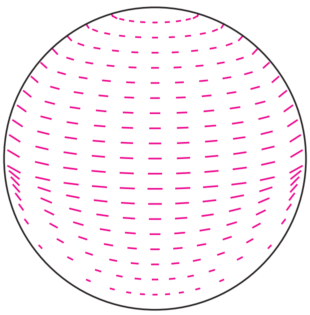
Twierdzenie o klasyfikacji zwartych powierzchni dwuwymiarowych. Każda ograniczona dwuwymiarowa powierzchnia bez brzegu, która jest w „jednym kawałku”, i o której można powiedzieć, gdzie ma wewnętrzną, a gdzie zewnętrzną stronę, jest powierzchnią pączka ewentualnie z dziurami w środku.



Rys. 10

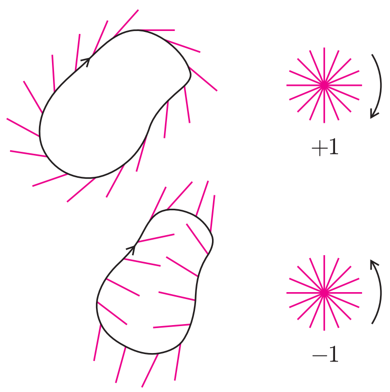


Rys. 9



Rys. 11

No, dobrze, a czy oprócz policzenia liczby dziur w powierzchni możemy w inny sposób przekonać się o tym, ile jest równa liczba Eulera (tzw. charakterystyka Eulera–Poincarégo) tej powierzchni? Owszem. Można, na przykład, spowodować, by powierzchnia balonika porosła włosami, a następnie gładko balonik uczesać. Dętkę zaczesać można bez żadnej łysinki (rys. 10), ale ze sferą taka sztuka się nie uda. Na przykład przy zaczesaniu z rysunku 11 mamy dwie łysinki na biegunach. Biorąc wokół każdej łysinki krzywą z określonym odpowiednio kierunkiem ruchu (czasem zgodnie, czasem przeciwnie do ruchu wskazówek zegara – nie będziemy tu wchodzić w szczegóły), możemy obliczyć tzw. indeks łysinki, czyli to, ile obrotów wykonały włoski wzdłuż krzywej (jeśli zgodnie z kierunkiem obrotu zadanym na tej krzywej, to ze znakiem plus, jeśli przeciwnie – to z minusem; rys. 12). Zachodzi



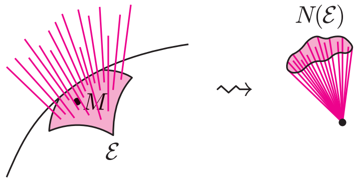
Rys. 12

Twierdzenie Poincarégo. Liczba Eulera E jest równa sumie indeksów wszystkich łysinek na powierzchni

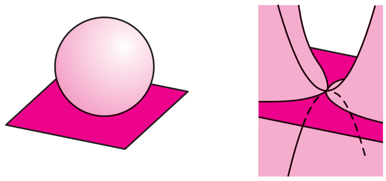
$$E = \sum_{A \in \text{zbior łysinek}} \text{indeks łysinki} A.$$

Jest to zadziwiające twierdzenie, gdyż łączy ono własność całej powierzchni (liczbę Eulera) z jej własnościami lokalnymi (indeksy łysinek).

Gdyby ktoś nie chciał jednak czesać balonów, może liczbę Eulera (charakterystykę Eulera–Poincarégo) obliczać jeszcze inaczej, wykorzystując



Rys. 13


Rys. 14

tzw. krzywiznę Gaussa. Żeby zrozumieć, o co chodzi, wyobraźmy sobie, że nasze baloniki pokryte są sierścią, czyli włoskami długości jeden, sterczącymi prostopadle do powierzchni. Weźmy teraz punkt M i mały fragment powierzchni wokół tego punktu o polu ε. Następnie zbierzmy ostrożnie włoski z tego fragmentu powierzchni i ułóżmy je tak, by wyrastały z jednego punktu, wciąż zachowując swój dawny kierunek (rys. 13). Wolne końce włosków wyznaczą nową niewielką powierzchnię o polu $N(\varepsilon)$. Możemy teraz określić krzywiznę Gaussa w punkcie M. Jej wartość bezwzględna jest równa granicy

$$K(M) = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{N(\varepsilon)}{\varepsilon},$$

przy czym z grubsza biorąc znak plus mamy wtedy, gdy płaszczyzna styczna do powierzchni w punkcie M leży po jej jednej stronie jak deska na piłce, a z minusem, gdy płaszczyzna ta rozcina powierzchnię, jak w przypadku siodła (rys. 14).

Okazuje się, że krzywizna Gaussa jest ściśle związana z charakterystyką Eulera–Poincarégo. Mówi o tym

Twierdzenie Gaussa–Bonneta. Sumując (ściślej: całkując) krzywiznę Gaussa po powierzchni i dzieląc przez 2π, otrzymujemy liczbę Eulera tej powierzchni

$$E = \frac{1}{2\pi}\int_X K(M)\mathrm{d}S.$$

Ci Czytelnicy, którzy nie wiedzą, jak się całkuje po powierzchni, mogą myśleć w ten sposób: wykonując powierzchnię balonu z papieru milimetrowego i w każdym milimetrowym kwadraciku wpisując średnią krzywiznę Gaussa w tym kwadraciku (jednostką jest milimetr), a następnie sumując wszystkie liczby, otrzymamy z bardzo dobrym przybliżeniem liczbę Eulera powierzchni balonika pomnożoną przez 2π.

W ten sposób od zabawy z balonem i mazakami można dojść do takiej matematyki, która raczej budzi szacunek.

Zadania

Redaguje Mikołaj KORZYŃSKI

F 651. Na szerokości geograficznej północnej Θ w kierunku północnym płynie rzeka o szerokości koryta L z prędkością v. Obliczyć różnicę poziomu rzeki na wschodnim i zachodnim brzegu spowodowaną siłą Coriolisa („hydrodynamiczny efekt Halla”).
Rozwiązanie na str. 12

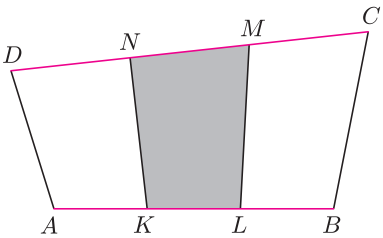
F 652. Jak wiadomo, dwa idealne, skrzyżowane polaroidy nie przepuszczają w ogóle światła. Pomiędzy nie wstawiamy N polaryzatorów skręconych o $\frac{\pi}{2(N+1)}$ jeden względem drugiego. Ile światła przepuszcza taki układ optyczny? Rozważyć granicę przy $N \to \infty$.
Rozwiązanie na str. 5

Redaguje Waldemar POMPE

M 1108. Rozwiązać w zbiorze liczb rzeczywistych układ równań $(n > 3)$

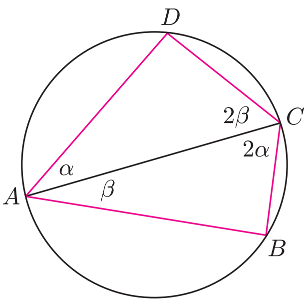
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = x_3 \\ x_2 + x_3 = x_4 \\ \dots\dots\dots \\ x_{n-2} + x_{n-1} = x_n \\ x_{n-1} + x_n = x_1 \\ x_n + x_1 = x_2 \end{cases}$$

Rozwiązanie na str. 4



Rys. 1

M 1109. Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$. Punkty K i L dzielą odcinek AB na trzy równe części, a punkty M i N dzielą odcinek CD na trzy równe części (rys. 1). Wykazać, że pole czworokąta o wierzchołkach K, L, M, N jest równe 1/3 pola czworokąta $ABCD$.
Rozwiązanie na str. 16



Rys. 2

M 1110. W czworokącie wypukłym $ABCD$ wpisanym w okrąg (rys. 2) zachodzą równości $\sphericalangle ACB = 2\sphericalangle CAD$ oraz $\sphericalangle ACD = 2\sphericalangle BAC$. Dowieść, że $BC + CD = AC$.
Rozwiązanie na str. 16