Przestrzenie ilorazowe, czyli sklejanie kartki papieru

Andrzej ORŁOWSKI, student, Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

Najpierw trochę teorii (od Redakcji)

1. Przekształcenia. Podstawowym pojęciem, które jest potrzebne, będzie *izometria*: przekształcenie, które nie zmienia odległości przekształcanych punktów. Takie są np. przesunięcia, obroty czy symetrie z poślizgiem. Wszystkie dalej omawiane przekształcenia będą izometriami.

Jeśli mamy przekształcenia płaszczyzny o tej własności, że każdy punkt, który ruszają, odrzucają na odległość równą co najmniej pewnej ustalonej stałej, to można tych przekształceń użyć do stworzenia nowej geometrii.

Najpierw powinniśmy dysponować kompletnym, zamkniętym zestawem takich przekształceń (zwanym przez matematyków grupą). W tym celu wraz z każdymi dwoma przekształceniami musimy mieć przekształcenie polegające na wykonaniu ich kolejno. Z każdym przekształceniem musimy też mieć przekształcenie do niego odwrotne. I już.

2. Orbity. Gdy te wszystkie fanaberyjne wymagania (nazwijmy je $\mathcal{W}$) będą spełnione, możemy zająć się *orbitami.* Orbita punktu to wszystkie punkty, które możemy z tego punktu otrzymać przez zastosowanie przekształceń z naszego kompletu.

Można wyobrazić sobie, że taka orbita jest jednym punktem. Najłatwiej jest zobaczyć to na następującym przykładzie: naszym zestawem przekształceń niech będzie zbiór wszystkich przesunięć o wielokrotność danego wektora $\vec{v}$. Orbitą każdego punktu będzie z obu stron nieskończony ciąg kropek leżących na prostej równoległej do $\vec{v}$, w którym sąsiednie kropki są odległe o $|\vec{v}|$. Nietrudno sobie wyobrazić, że gdyby płaszczyzna była z przezroczystej folii do pakowania kwiatów, to dałoby się ją zwinąć w rulonik, tak aby wszystkie punkty (każdej!) orbity były widoczne jako jeden punkt (dla każdej orbity inny).

Okazuje się, że tak samo można (choć niekoniecznie fizycznie) posklejać punkty w każdej sytuacji spełniającej $\mathcal{W}$. Otrzymuje się wtedy nową geometrię.

3. Przestrzeń ilorazowa. Aby się nią zająć, trzeba jeszcze powiedzieć, jak na takiej *przestrzeni ilorazowej* (bo tak nazywa się sytuację, gdy za punkty uważamy orbity) mierzy się odległość. Okazuje się, że najprostsze rozwiązanie spełnia wszystkie wymagania matematyków: odległość dwóch orbit – punktów przestrzeni ilorazowej – to długość najkrótszej krzywej, jaka łączy którekolwiek punkty jednej i drugiej orbity.

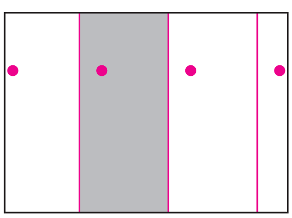
I jeszcze o figurach. Proste w przestrzeni ilorazowej to takie linie, których małe łuki to obrazy po zwinięciu zwykłych odcinków. Okręgi to – jak zazwyczaj – zbiory punktów o danej odległości od danego punktu. I t.p. Badanie wyglądu takich figur w „pozwijanych” przestrzeniach to temat tego artykułu.

4. Obszar fundamentalny. Unaocznić sobie nową geometrię można za pomocą obserwowania jej na fragmencie (uwaga: nieposklejanym!) płaszczyzny. Jeśli bowiem weźmiemy pod uwagę taki jej obszar, na którym jest reprezentowana, ale tylko raz, każda orbita, to wszystko, co się dzieje w przestrzeni ilorazowej (czyli przestrzeni orbit), będziemy mogli na tym obszarze zilustrować. Mamy przecież na nim reprezentowane wszystkie punkty, które składają się na przestrzeń ilorazową. Taki obszar nazywamy *obszarem fundamentalnym.* Jego główną zaletą jest to, że na nim nic nie sklejamy – sklejamy tylko jego brzegi.

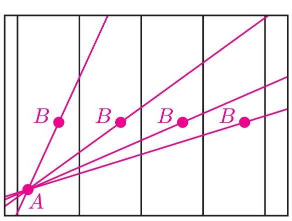
W rozpatrywanym przykładzie obszarem fundamentalnym może być, na przykład, pasek prostopadły do $\vec{v}$ o szerokości $|\vec{v}|$. Po sklejeniu brzegów również na sklejeniu każda orbita występować będzie także tylko raz. Oczywiście, otrzymamy coś, co będzie wyglądało tak, jak oryginalna przestrzeń ilorazowa – rulonik, czyli nieograniczonej długości walec.

5. Badania. Zauważmy, że gdy zainteresuje nas tak mała figura na płaszczyźnie, że zmieści się ona w obszarze fundamentalnym, to jej własności nie ulegną zmianie. Dlatego mówimy, że przestrzeń ilorazowa jest *lokalnie euklidesowa.* A jeśli zajmiemy się figurami większymi? – To właśnie będziemy badać.

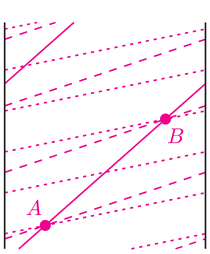
Do roboty!



Rys. 1



Rys. 2



Rys. 3

Geometria walca

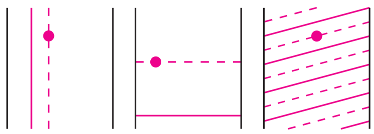
Pierwszą modyfikacją kartki, jaka przychodzi nam do głowy, jest zwinięcie jej w rulonik. Na rysunku 1 szarym kolorem zaznaczony jest obszar fundamentalny przestrzeni ilorazowej wyznaczonej przez wszystkie przesunięcia będące całkowitymi wielokrotnościami pewnego wektora. Kropki to punkty jednej z orbit. Spróbujmy posłużyć się tym rysunkiem dla stwierdzenia, jak wyglądają proste w tej przestrzeni.

Okazuje się, że mamy ich trzy różne typy. Pierwszy, czyli prosta pionowa, właściwie nie różni się od prostej na płaszczyźnie. Drugi to prosta zamknięta, która wygląda jak gumka recepturka naciągnięta na walec. Taka prosta ma skończoną długość. Trzeci typ to nieskończona sprężyna.

Jak wiemy, przez dwa punkty na płaszczyźnie przechodzi dokładnie jedna prosta. Na walcu nie jest to prawda. Wybierzmy na płaszczyźnie punkty A i B. Dla każdego punktu z orbity punktu B poprowadźmy prostą przez niego i przez A (rys. 2). Co widzimy na walcu? Nieskończenie wiele prostych przechodzących przez orbity punktów A i B. To „sprężyny” o różnych kątach nachylenia do osi walca (rys. 3).

Nasuwa się pytanie, czy taka geometria jest choć trochę „porządna” – sprawdźmy na przykład, czy spełniony jest piąty postulat Euklidesa: *do danej prostej, przez dany punkt leżący poza nią, można poprowadzić co najwyżej jedną prostą rozłączną.* Okazuje się, że tak: do każdej prostej można dobrać dokładnie jedną prostą tego samego typu równoległą do niej i przechodzącą przez ustalony punkt (rys. 4). Proste różnych typów nie mogą być równoległe.

Zajmijmy się z kolei okręgami – interesujące są te, które nie mieszczą się w obszarze fundamentalnym. Już okrąg o średnicy równej szerokości obszaru fundamentalnego zaczyna wykazywać nieco dziwne własności. Jest on bowiem styczny sam do siebie (rys. 5(a)). A jeśli jeszcze trochę zwiększymy promień, to uzyskamy okrąg niespójny. Patrząc na orbity punktów okręgu na płaszczyźnie, które nie zmieściły się w obszarze fundamentalnym, można sobie wyobrazić, że wystające skrzydełka zawiną się do środka. Wobec tego nie zostaną uwzględnione, ponieważ ich odległość od środka okręgu jest mniejsza niż długość promienia (rys. 5(b)). Okrąg podzieli się na część górną i dolną.

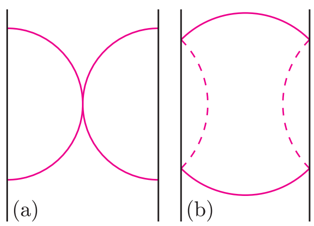


Rys. 4

Figura jest niewypukła, jeżeli ma takie dwa punkty, że odcinek je łączący nie jest zawarty w tej figurze.

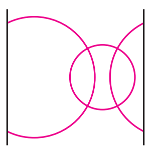
Pewnie nie zdziwi nas już, że dwa okręgi na walcu mogą mieć od zera do czterech punktów wspólnych. Jedną z ciekawych możliwości pokazuje rysunek 6.

Dziwne własności okręgów to jeszcze nic w porównaniu z tym, jak zachowują się na walcu koła. Przyzwyczailiśmy się do myśli, że koło jest figurą wypukłą. A tymczasem na walcu koło może być niewypukłe! Rysunek 7 pokazuje, że każde dwa punkty można połączyć odcinkiem przechodzącym „z tyłu” walca. Dla kół o dużych promieniach niektóre z tych odcinków są zawarte w kole, ale zawsze znajdą się takie, które wychodzą poza koło.



Rys. 5

Dochodzimy do najważniejszego punktu programu dla walca. Pokażemy, że nie jest spełniona pierwsza cecha przystawania trójkątów: *trójkąty o bokach* a, b, c *i* a', b', c' *są przystające, jeżeli ich boki są parami przystające.* Konstrukcję kontrprzykładu zaczynamy od narysowania dwóch okręgów o czterech punktach wspólnych. Pierwszy trójkąt powstaje przez połączenie ich środków i jednego z punktów przecięcia. Podstawą drugiego też jest odcinek łączący środki, ale jako trzeci wierzchołek wybieramy drugi punkt przecięcia okręgów – ten, który leży na poziomej prostej z trzecim wierzchołkiem pierwszego trójkąta. Efekt widać na rysunku 8. Boki trójkątów są przystające: jeden jest wspólny, a pozostałe dwa to promienie obu narysowanych okręgów. Natomiast trójkąty nie są przystające, chociażby dlatego, że boki jednego rozcinają walec na część ograniczoną i nieograniczoną, a drugiego na dwie nieograniczone. Zatem nie może istnieć izometria walca przekształcająca jeden trójkąt na drugi.

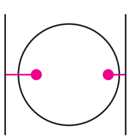


Rys. 6

Okazuje się, że wstęgi zrobionej z prawdziwej płaszczyzny, a nie ograniczonego paska papieru, nie da się przedstawić bez samoprzecięć w przestrzeni trójwymiarowej – potrzebne są cztery wymiary.

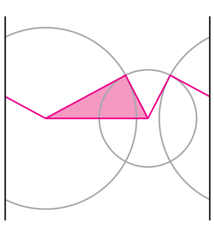
Geometria wstęgi Möbiusa

Inną, a może nawet lepszą, zabawą z kartką papieru jest zrobienie z niej wstęgi Möbiusa. Przekształcenia, które wykorzystujemy tym razem, to *symetrie z poślizgiem*: ustalamy prostą na płaszczyźnie oraz równoległy do niej wektor i każdy punkt płaszczyzny przesuwamy o wektor, a potem odbijamy względem prostej (a może na odwrót?). Obszar fundamentalny jest taki sam, jak dla walca, ale orbity punktów nie leżą już na prostej, tylko zawierają punkty nad i pod wybraną osią symetrii (rys. 9). Oczywiście, z wyjątkiem orbit punktów leżących na samej osi symetrii.



Rys. 7

Okazuje się, że na wstędze Möbiusa można wyróżnić jeszcze więcej typów prostych niż na walcu. Oprócz pionowych i spiralnych mamy proste zamknięte dłuższe i krótsze. Prosta pochodząca od osi symetrii jest dwa razy krótsza od wszystkich innych prostych zamkniętych. Można to sprawdzić doświadczalnie, rozcinając jedną wstęgę przez środek, a drugą przy brzegu. Wszystkie rodzaje prostych pokazuje rysunek 10. Widać na nim, na przykład, że proste spiralne mają samoprzecięcia. W szczególności wynika stąd, że piąty postulat Euklidesa nie jest spełniony. Warto jeszcze zauważyć, że tak jak na walcu, przez dwa punkty może przechodzić nieskończenie wiele prostych spiralnych.

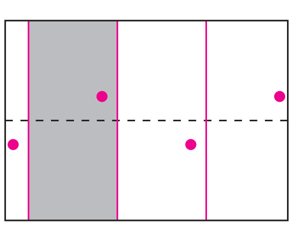


Rys. 8

O ile na walcu poszczególne okręgi zachowywały się dość stabilnie, teraz już nie jest tak dobrze: proponujemy, na przykład, poszukać dwóch okręgów o tym samym promieniu, ale różnej długości. Natomiast konstrukcja trójkątów niespełniających pierwszej cechy przystawania przebiega podobnie jak poprzednio. Tym razem jednak obydwa trójkąty rozcinają przestrzeń na część ograniczoną i nieograniczoną, więc trzeba zauważyć coś innego, żeby je rozróżnić. Okazuje się, że wystarczy zbadać, w którym z otrzymanych obszarów można zmieścić prostą.

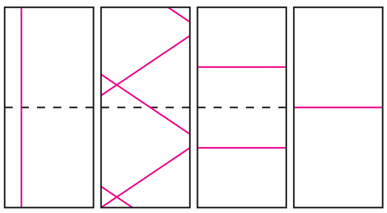
Przesunięcia w dwóch kierunkach

Do tej pory zajmowaliśmy się sklejaniem kartki tylko w jednym kierunku. Tym razem do skonstruowania przestrzeni ilorazowej użyjemy przesunięć o wektor poziomy

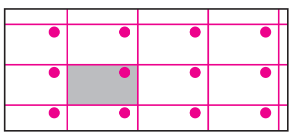


Rys. 9

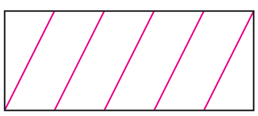
Jeśli zanurzymy ten torus w przestrzeń trójwymiarową i będziemy obliczać odległości punktów tak, jak w tej przestrzeni, to otrzymana geometria będzie inna niż ta, którą rozpatrujemy (czyli eksperymenty na oponie nie wchodzą w grę). Natomiast naszą geometrię możemy zrealizować, zanurzając torus w przestrzeń czterowymiarową.



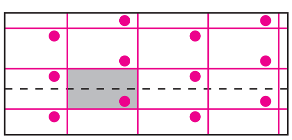
Rys. 10



Rys. 11



Rys. 12



Rys. 13

i przesunięć o wektor pionowy. Obszarem fundamentalnym jest prostokąt – utożsamiamy w nim równoległe brzegi. Otrzymana przestrzeń wygląda trochę jak walec, ale obcięty z dwóch stron i sklejony – to jest torus.

Opis prostych zacznijmy od zamkniętych. Oczywiście, jest prosta pionowa i pozioma, ale można też zrobić ukośną, również zamkniętą. Co więcej, możemy skonstruować dowolnie długą prostą zamkniętą. W obszarze fundamentalnym narysujemy ją, dzieląc, na przykład, poziome brzegi na odpowiednio dużo równych części, jak na rysunku 12. Ale mamy też proste nieskończone. Zaznaczmy na dolnym boku prostokąta, mierząc od lewego końca, odcinek o długości niewspółmiernej z długością tego boku (na przykład niewymiernej, jeśli bok ma długość będącą liczbą wymierną). Wraz z lewym bokiem prostokąta ten odcinek utworzy mniejszy prostokąt – przedłużenie jego przekątnej to interesująca nas prosta. Łatwo sprawdzić, że nigdy się nie zamknie i utworzy zbiór gęsty w torusie (czyli jej punkty będą dowolnie blisko każdego punktu). Mimo to zostaje jeszcze na tyle dużo miejsca, żeby można było dołożyć drugą prostą, równoległą do tej, tak aby piąty aksjomat Euklidesa był spełniony!

Ciekawym okręgiem, który można zaobserwować na torusie, jest okrąg będący zbiorem pustym. Wystarczy przyjąć odpowiednio duży promień, a wszystkie punkty przestrzeni będą leżały zbyt blisko środka, by należeć do okręgu. Wobec tego widać też, że cały torus jest bardzo dobrym kołem.

Zauważyliśmy już, że torus możemy otrzymać z rozważanego wcześniej walca przez dodanie przesunięć o pionowe wektory. Możemy sobie wyobrazić to przejście jako wykonanie dwóch poziomych cięć na walcu i sklejenie brzegu ograniczonej części. To oznacza, że konstrukcje, które wykonaliśmy na walcu, więc też wszystkie opisane fenomeny geometrii, przenoszą się na torus: wystarczy wykonać konstrukcję na walcu, obciąć walec tak, żeby nie naruszyć konstrukcji i skleić brzegi. Czytelnik Wnikliwy z pewnością zechce zbadać, czy na torusie można znaleźć jeszcze coś ciekawego, w szczególności zaś odpowie na pytanie, ile punktów przecięcia mogą mieć narysowane na nim dwa okręgi.

Skrzyżowanie torusa ze wstęgą Möbiusa

A gdybyśmy wykonywali przesunięcia o wektor w kierunku pionowym i symetrie z poślizgiem w kierunku poziomym? Tak otrzymana przestrzeń ilorazowa to butelka Kleina. Obszarem fundamentalnym znów jest prostokąt, ale tym razem musimy pamiętać, że w poziomej parze jeden bok przed sklejeniem obracamy. Orbitę pewnego punktu widać na rysunku 13.

Okazuje się, że to też już właściwie przerabialiśmy. Butelkę Kleina możemy sobie wyobrażać jako walec (tym razem z brzegiem), w którym sklejamy części brzegu, ale w innym kierunku, niż żeby dostać torus. A możemy też wyobrazić sobie, że we wstędze Möbiusa (też z brzegiem) dzielimy brzeg na pół i odpowiednio sklejamy. Wszystko zależy od tego, w jakiej kolejności będziemy się przyglądać przekształceniom: symetriom z poślizgiem i przesunięciom. A przyjrzenie się im to ładne ćwiczenie na wyobraźnię wielowymiarową. W każdym razie to, co umiemy skonstruować na walcu i na wstędze, przenosi się na butelkę.

Coś jeszcze?

Do tej pory nie używaliśmy obrotów, czyli nie próbowaliśmy zwinąć kartki w stożek. Czytelnik sprawdzi jednak, że obcinając wierzchołek tak otrzymanego stożka, dostajemy geometrię walca, więc wszystkie konstrukcje, które umiemy wykonać dla walca, przenoszą się na ten przypadek.

Tropienie dalszych fenomenów geometrii przestrzeni ilorazowych pozostawiamy wytrwałym poszukiwaczom przygód.

Felix Klein udowodnił, że każda (dwuwymiarowa) przestrzeń lokalnie euklidesowa powstaje jako taka właśnie przestrzeń ilorazowa i jest tych przestrzeni pięć rodzajów. Podobnie, jako takie przestrzenie ilorazowe otrzymujemy wszystkie przestrzenie lokalnie takie jak sfera, czyli powierzchnia kuli – są ich dwa rodzaje. Wreszcie istnieje jeszcze tylko jedna inna możliwość: to geometrie lokalnie takie, jak ta, którą nazywamy imionami Jánosa Bolyaia i Nikołaja Łobaczewskiego – jak się łatwo domyślić, jest ich nieskończenie wiele rodzajów. Je również uzyskujemy z płaszczyzny Bolyaia–Łobaczewskiego jako przestrzenie ilorazowe.