Nagrody Abela w roku 2020

Za co Hillel Furstenberg (Uniwersytet Hebrajski w Jerozolimie) oraz Gregory Margulis (Uniwersytet Yale w New Haven) otrzymali tegoroczną nagrodę?

*Mariusz LEMAŃCZYK**

* Wydział Matematyki i Informatyki, Uniwersytet Mikołaja Kopernika

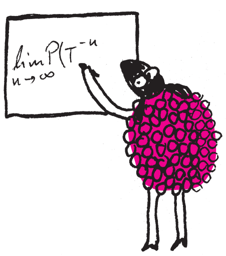
Badania naukowe tegorocznych laureatów Nagrody Abela koncentrują się na głębokich zastosowaniach teorii ergodycznej w różnych zagadnieniach dotyczących teorii liczb, geometrii, aproksymacji czy kombinatoryki. Teoria ergodyczna, która jest częścią szerszej teorii układów dynamicznych, wyrosła około 100 lat temu z zagadnień czysto fizycznych. W teorii tej zajmujemy się przestrzeniami probabilistycznymi $(\Omega, \mathbb{P})$, gdzie $\mathbb{P}(A)$ jest prawdopodobieństwem zdarzenia $A \subset \Omega$. Zazwyczaj $\mathbb{P}$ jest określone tylko dla pewnej rodziny podzbiorów zbioru Ω, zwanych *zbiorami mierzalnymi*. Na Ω mamy dodatkowo określone przekształcenie $T : \Omega \to \Omega$ zachowujące prawdopodobieństwo $\mathbb{P}$, tzn. $\mathbb{P}(T^{-1}(A)) = \mathbb{P}(A)$ dla podzbiorów mierzalnych $A \subset \Omega$. Przekształcenie T mówi nam, jak przebiega ewolucja punktów $\omega \in \Omega$ w czasie:

$$\omega \mapsto T\omega \mapsto T^2\omega \mapsto \ldots,$$

zachowywanie prawdopodobieństwa zaś to pewne „prawo fizyczne” – ewolucja w naszym *układzie dynamicznym* $(\Omega, \mathbb{P}, T)$ odbywa się z zachowaniem „objętości”, tzn. z zachowaniem prawdopodobieństwa $\mathbb{P}$. Popatrzmy na bardzo prosty przykład układu dynamicznego. Niech Ω będzie okręgiem jednostkowym, tzn. niech $\Omega = \mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C};\ |z| = 1\}$, $\mathbb{P}$ zaś prawdopodobieństwem wyznaczonym przez żądanie, aby dla każdego łuku $A \subset \mathbb{S}^1$, $\mathbb{P}(A) = \frac{1}{2\pi}|A|$ (gdzie przez $|A|$ oznaczyliśmy długość łuku) i niech $Tz = e^{2\pi i\alpha}z$, gdzie $\alpha \in [0, 1)$ (T jest obrotem o kąt $2\pi\alpha$). Ten przykład jest charakterystyczny dla sytuacji, w której mamy dodatkową strukturę przestrzeni Ω, tzn. mamy zadane „dobre” przekształcenie T „dobrej” przestrzeni Ω i próbujemy opisać **wszystkie** możliwe prawdopodobieństwa niezmiennicze (w przykładzie powyżej można pokazać, że wskazane przez nas prawdopodobieństwo jest **jedynym** prawdopodobieństwem niezmienniczym, gdy α jest liczbą niewymierną). Natomiast sama teoria ergodyczna bada rozmieszczenie („geometrię”) *orbit* punktów w przestrzeni, tzn. zbiorów $\{T^n\omega :\ n \geqslant 0\}$, interesuje się własnościami „mieszającymi” (co jest wstępem do badania chaosu w układzie). Możemy np. pytać, czy $\bigcup_{n\geqslant 0} T^{-n}(A) = \Omega$, a dokładniej – pytać, czy z prawdopodobieństwem 1 orbita punktu $\omega \in \Omega$ trafi do ustalonego zbioru A, takiego że $\mathbb{P}(A) > 0$ (mówimy wtedy, że T jest *przekształceniem ergodycznym*). W powyższym przykładzie przekształcenie T jest ergodyczne wtedy i tylko wtedy, gdy α jest liczbą niewymierną. Możemy sprawdzać warunek mieszania dla podzbiorów mierzalnych $A, B \subset \Omega$:

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(T^{-n}(A) \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$$

(a więc intuicyjnie zbiór B po pewnym czasie rozmazuje się po całej przestrzeni, przy czym jest on w każdym zbiorze A proporcjonalnie do swojej miary). Ergodyczność i mieszanie to przykłady własności, które dla pewnych układów zachodzą, a dla innych nie zachodzą. Ale są też własności (dodajmy nieoczywiste), które zachodzą w **każdym** układzie dynamicznym. Dla przykładu w każdym układzie dynamicznym $(\Omega, \mathbb{P}, T)$, dla dowolnego zbioru mierzalnego A, prawie każdy punkt $\omega \in A$ powróci do zbioru A nieskończenie wiele razy (ten fakt, zwany twierdzeniem o powracaniu, został odkryty przez Poincarégo jeszcze w XIX wieku). Znacznie głębsze jest słynne twierdzenie ergodyczne Birkhoffa (sprzed 90 lat), które mówi nam, że typowe punkty (tzn. punkty z pewnego zbioru o prawdopodobieństwie 1) „chodzą” po przestrzeni regularnie w tym sensie, że jeśli weźmiemy jakikolwiek „pomiar” na naszej przestrzeni (wyrażany przez funkcję $f : \Omega \to \mathbb{R}$, powiedzmy „mierzalną” i ograniczoną), to średnie $\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} f(T^n w)$ mają granicę, gdy $N \to \infty$. A gdy układ $(\Omega, \mathbb{P}, T)$ jest dodatkowo ergodyczny, to granica ta będzie równa „średniej” funkcji f po całej przestrzeni (tzn. otrzymamy całkę funkcji f względem prawdopodobieństwa $\mathbb{P}$).



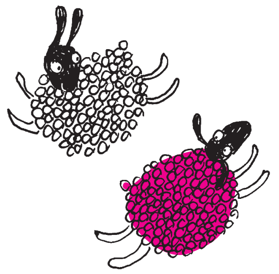
Rozwiązanie zadania F 1012.
Jeżeli mięśnie zbudowane są z ułożonych równolegle jednakowych włókien, z których każde podczas skurczu działa z tą samą siłą, to siła F, z jaką działa mięsień, jest proporcjonalna do pola S jego przekroju poprzecznego. Skrócenie d mięśnia jest proporcjonalne do jego długości l. Energia potencjalna „skoczka” o masie m po osiągnięciu maksymalnej wysokości h jest równa pracy wykonanej przez kurczące się mięśnie: $mgh = Fd$, a więc

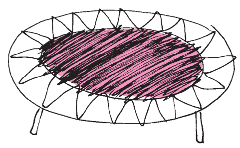
$$h = \frac{Fd}{mg}.$$

Występujące we wzorze wielkości skalują się z rozmiarem L zwierzęcia w następujący sposób: $m \propto L^3$, $F \propto S \propto L^2$ i $d \propto L$. Otrzymujemy:

$$h \propto \frac{L^2 \cdot L}{L^3} = L^0.$$

Nasze rozumowanie prowadzi do wniosku, że wysokość skoku nie zależy od rozmiarów zwierzęcia i tym samym także od jego masy. Dane (Knut Schmidt-Nielsen, *Dlaczego tak ważne są rozmiary zwierząt*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1994):
pchła: $h = 20$ cm, $m = 0{,}49$ mg;
szarańcza $h = 59$ cm, $m = 3$ g;
człowiek $h = 60$ cm, $m = 70$ kg.





Powyżej mówiliśmy o sytuacji, w której mamy do czynienia z jednym przekształceniem T (choć właściwie rozpatrujemy zbiór $\{T^n;\ n \in \mathbb{N}\}$), ale można sobie wyobrażać, że na Ω działa rodzina przekształceń $\{T_g;\ g \in G\}$, gdzie G ma jakąś dodatkową strukturę. Dla przykładu możemy myśleć, że G jest pewną rodziną macierzy o wyznaczniku różnym od zera, zamkniętą ze względu na mnożenie i branie elementu odwrotnego – jest to więc szczególny przypadek struktury, którą w matematyce nazywa się *grupą*. Wtedy rodzina $\{T_g;\ g \in G\}$ jest pewną *reprezentacją* grupy G w zbiorze układów dynamicznych przestrzeni $(\Omega, \mathbb{P})$ (zakładamy zachowywanie struktur, tzn. zakładamy, że $T_{gh} = T_g \circ T_h$ dla $g, h \in G$). I znowu możemy zadawać różne ciekawe pytania ergodyczne, których próbkę widzieliśmy powyżej, gdy „czas” G był równy $\mathbb{N}$. Czy taka abstrakcyjna teoria, która przecież musiała wypracować trudne metody, aby dowodzić w miarę ogólnych twierdzeń, może mieć cokolwiek wspólnego z bardziej „przyziemnymi” problemami matematyki? Okazuje się, że tak. Geniusz Hillela Furstenberga polegał m.in. na tym, że zaproponował on już w latach 70. XX wieku dalsze rozwijanie teorii ergodycznej w duchu twierdzeń dotyczących wielokrotnego powracania czy też zbieżności niekonwencjonalnych średnich ergodycznych. Widział on, że – może nieco wbrew swoim „fizycznym” korzeniom – twierdzenia teorii ergodycznej dają się interpretować jako twierdzenia o kombinatorycznych własnościach podzbiorów zbioru „czasów”, w szczególności podzbiorów zbioru liczb naturalnych. Furstenberg udowodnił na przykład, że dla dowolnego układu dynamicznego $(\Omega, \mathbb{P}, T)$, dowolnej liczby naturalnej $\ell \geqslant 1$ i dowolnego zbioru $A \subset \Omega$, $\mathbb{P}(A) > 0$ mamy

$$(*) \qquad \mathbb{P}(A \cap T^{-r}(A) \cap T^{-2r}(A) \cap \ldots \cap T^{-\ell r}(A)) > 0$$

dla **nieskończenie wielu** $r \geqslant 1$. Udowodnił on również, że powyższe twierdzenie jest równoważne pewnemu twierdzeniu opisującemu kombinatoryczne własności „dużych” podzbiorów liczb naturalnych. Zanim jednak przedstawimy jego pełne sformułowanie, potrzebujemy następującej definicji:

Definicja (górnej dodatniej gęstości Banacha). Powiemy, że zbiór $F \subset \mathbb{N}$ ma własność GGBD, jeśli istnieje stała $\kappa > 0$ oraz dwa ciągi liczbowe a_N i b_N, które mają (dla każdego naturalnego N) następujące własności: $a_N \geqslant 1$, $b_N > N$ i $\frac{1}{b_N}|F \cap [a_N, a_N + b_N]| \geqslant \kappa$.

A oto i samo twierdzenie:

Twierdzenie. *Jeśli $F \subset \mathbb{N}$ ma własność GGBD, to zbiór F zawiera postępy arytmetyczne dowolnej długości. Tzn. dla dowolnej liczby naturalnej $\ell \geqslant 1$ istnieje takie $r \geqslant 1$ oraz $n \geqslant 1$, że $n, n+r, n+2r, \ldots, n+\ell r \in F$.*

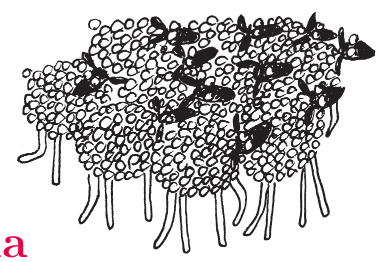
W pewnym sensie widać, że zbiór F nie może być „dowolny”, jakaś struktura całego zbioru liczb naturalnych w nim pozostała. Można spostrzec, że gdy $\mathbb{N} = F_1 \cup \ldots \cup F_s$, gdzie zbiory F_j, $j = 1, \ldots, s$ są parami rozłączne, to któryś z tych zbiorów musi mieć własność GGBD, a więc w którymś ze zbiorów F_j musiała „przeżyć” struktura zbioru $\mathbb{N}$. Może jeszcze tytułem ciekawostki dodajmy, że aby udowodnić powyższe twierdzenie, udowodnione wcześniej przez matematyka węgierskiego Endre Szemerédiego (laureata Nagrody Abela w roku 2012) metodami czysto kombinatorycznymi, w $(*)$ potrzebujemy „jedynie”, żeby przekroje $A \cap T^{-r}(A) \cap \ldots \cap T^{-\ell r}(A)$ były niepuste. Tak to już jednak bywa, że aby wykazać niepustość zbioru, tzn. istnienie „dobrej” konfiguracji bez wskazywania **konkretnej** konfiguracji, trzeba rozwinąć ogromną teorię wskazującą na **powód** niepustości.

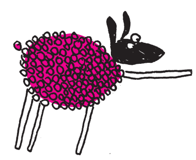
Gdy chcemy dowodzić bardziej specyficznych własności teorioliczbowych czy też kombinatorycznych, często możemy zawęzić klasę układów dynamicznych, których pewne własności ergodyczne (o ile uda nam się je udowodnić) mają ciekawe i może bardziej intuicyjne implikacje. Niezwykle owocną rolę odgrywają tu tzw. układy dynamiczne pochodzenia algebraicznego, które są określone na pewnych strukturach ilorazowych grup macierzowych, a reprezentacja grupy G pochodzi od „obrotów” wyznaczonych przez mnożenie macierzy (obroty niewymierne są tu bardzo prostym, bo jednowymiarowym, przykładem takich działań). Zilustrujmy to podejście słynną hipotezą Oppenheima o formach kwadratowych sprzed 90 lat, której prawdziwość udowodnił Gregory Margulis (laureat medalu Fieldsa z 1978 roku). Tytułem wprowadzenia popatrzmy na przypadek form zależących od dwóch zmiennych $x, y \in \mathbb{R}$. Otóż można spostrzec, że wzór $Q(x,y) = x^2 - (\alpha+1)y^2$, gdzie α jest złotą proporcją, tzn. $\alpha = \frac{1}{2}(\sqrt{5}+1)$ definiuje funkcję $Q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ o następujących własnościach: (i) Q jest formą kwadratową, (ii) Q przyjmuje zarówno wartości dodatnie, jak i ujemne (Q nie jest ani dodatnio ani ujemnie określona), a ponadto (iii) Q nie jest proporcjonalna do formy o współczynnikach wymiernych. Jeśli teraz $x, y \neq 0$ są liczbami całkowitymi, to (wobec $\alpha^2 = \alpha + 1$)

$$|Q(x,y)| = y^2 \left|\frac{x}{y} + \alpha\right| \left|\frac{x}{y} - \alpha\right| \geqslant \alpha y^2 \left|\frac{x}{y} - \alpha\right| \geqslant \alpha C > 0,$$

gdyż złota liczba jest źle aproksymowalna liczbami wymiernymi: $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \geqslant C/q^2$ dla pewnej stałej $C > 0$ i **dowolnych** $p, q \in \mathbb{N}$! Zatem wartości formy Q przyjmowane na argumentach całkowitych ($(x,y) \neq (0,0)$) są odgraniczone od zera. Słynna hipoteza Oppenheima stanowiła, że jeśli użyjemy więcej zmiennych niż dwie, np. rozpatrując $Q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ spełniające własności (i)–(iii) podane powyżej, to takiego odgraniczenia od zera **nie** możemy uzyskać. Jakie tutaj układy dynamiczne będą odpowiadały za rozwiązanie problemu? Dowód Margulisa polegał na studiowaniu orbit grupy przekształceń zachowujących formę i klasyfikacji miar niezmienniczych, które możemy uzyskać na domknięciu orbit w tzw. przestrzeni jednorodnej odpowiedniej grupy macierzy o wyznaczniku 1.

Wybitne osiągnięcia tegorocznych laureatów nagrody Abela (i ich uczniów) pokazują, jak nowe, często zaskakujące, idee prowadzą do przełomowych odkryć stanowiących o postępie w nauce.





Zadania

Przygotował Łukasz BOŻYK

M 1654. Piotrek stoi w windzie na ostatnim piętrze $(n+1)$-poziomowego wieżowca, licząc z parterem. Postępuje zgodnie z następującą zasadą: jeśli znajduje się na k-tym piętrze, przy czym $1 \leqslant k \leqslant n$, to losuje, na który z k niższych poziomów $0, 1, \ldots, k-1$ zjeżdża, tzn. każdy z nich wybiera z prawdopodobieństwem $\frac{1}{k}$.
(a) Jaki jest średnio numer piętra, z którego Piotrek zjedzie na parter?
(b) Ile średnio przejazdów windą wykona?
Rozwiązanie na str. 17

M 1655. Niech $n \geqslant 1$ będzie liczbą całkowitą. Każdy wyraz ciągu $(a_1, a_2, \ldots, a_{2n})$ jest równy 1 lub -1. Parę (k, l) nazwiemy *zerującą*, jeśli $1 \leqslant k < l \leqslant 2n$ oraz $a_k + a_{k+1} + \ldots + a_l = 0$. Wykazać, że liczba par zerujących jest nie większa od n^2.
Rozwiązanie na str. 18

M 1656. Niech $n \geqslant 1$ będzie liczbą całkowitą. Każdy wyraz ciągu $(b_1, b_2, \ldots, b_{2n-1})$ jest równy 1 lub -1. Parę (k, l) nazwiemy *minusjedynkującą*, jeśli $1 \leqslant k < l \leqslant 2n-1$ oraz $b_k \cdot b_{k+1} \cdot \ldots \cdot b_l = -1$. Wykazać, że liczba par minusjedynkujących jest nie większa od n^2.
Rozwiązanie na str. 19

Przygotował Andrzej MAJHOFER

F 1011. Siła nośna F utrzymująca ptaka podczas lotu wynosi:

$$F = \frac{1}{2} c_L \rho_p S v^2,$$

gdzie ρ_p jest gęstością powietrza, v prędkością lotu (względem powietrza), S powierzchnią skrzydeł, a c_L współczynnikiem związanym z kształtem lecącego ptaka. Opierając się na tym, że siła oporu powietrza jest proporcjonalna do v^2, oszacuj, jak optymalna predkość poziomego lotu zależy od masy m ptaka.
Rozwiązanie na str. 13

F 1012. Mięśnie zbudowane są z bardzo wielu jednakowych, ułożonych równolegle, cienkich włókien. Podczas kurczenia każde włókno skraca się o odcinek proporcjonalny do jego długości i działa na punkt zaczepienia z taką samą siłą. Oszacuj, jak wysokość h skoku zwierzęcia zależy od jego masy m. Przez wysokość skoku rozumiemy tu zmianę wysokości jego środka masy podczas skoku „z miejsca”, tj. bez rozbiegu.
Rozwiązanie na str. 1