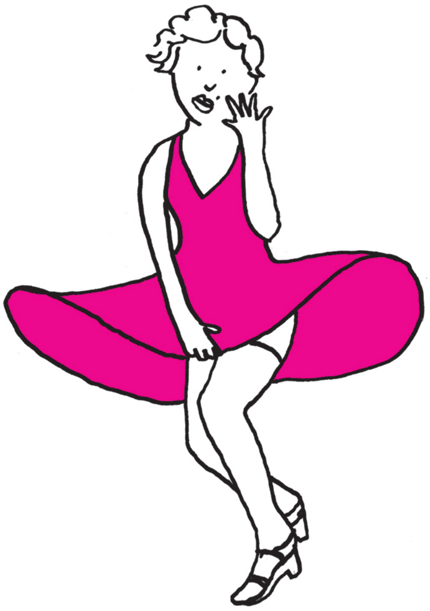
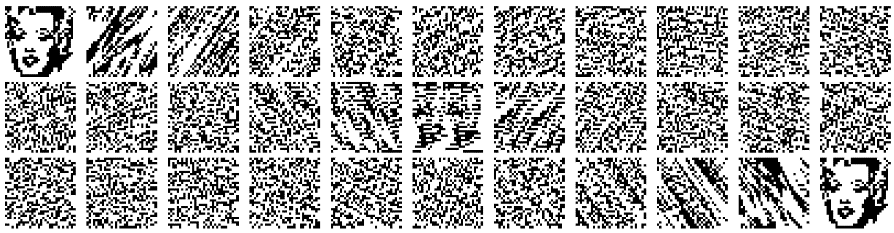
Twierdzenie o powracaniu i pewne zagadki nierównowagowej mechaniki statystycznej (I)

*Krzysztof TURZYŃSKI, Henryk ŻOŁĄDEK**



Wymienione w tytule tematy uchodzą za trudne. Tym ważniejsze jest zacząć od rzeczy prostych i powszechnie znanych. Weźmy pewien zbiór o skończonej liczbie elementów i jego różnowartościowe przekształcenie na siebie, czyli permutację. Dla lepszego efektu wizualnego będziemy sobie wyobrażać zbiór czarnych lub białych kwadratów wypełniających pola kwadratowej tablicy 32×32 oraz permutację, dla której w i-tym wierszu i j-tej kolumnie tablicy umieszczamy kwadrat poprzednio znajdujący się w wierszu o numerze $(i+j) \bmod 32$ oraz kolumnie o numerze $(2i+j) \bmod 32$. Wyniki wielokrotnego złożenia takiej permutacji dla pewnego wyjściowego ułożenia kwadratów przedstawione są na rysunku 1: po wykonaniu 32 iteracji otrzymujemy taki sam wzór jak na początku.



Rys. 1

Czy podobne efekty – powracanie zbioru do stanu wyjściowego po wielokrotnym wykonaniu pewnego przekształcenia – możemy zaobserwować także dla zbiorów nieskończonych? Aby odpowiedzieć na to, intuicyjnie zrozumiałe, ale nie do końca precyzyjne pytanie, przypatrzmy się jeszcze trzem dość prostym przykładom.

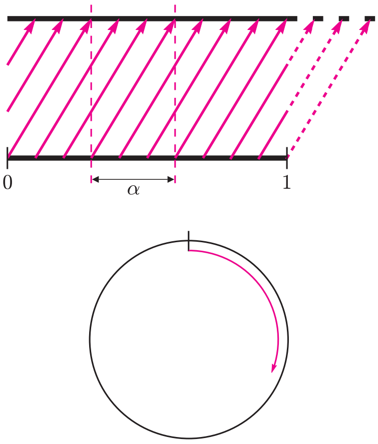
Obrót na okręgu. Niezbyt skomplikowanym przykładem zbioru nieskończonego jest odcinek $[0,1]$. Żeby uniknąć kłopotów związanych z tym, iż odcinek ma końce, możemy utożsamić jego lewy koniec z prawym – otrzymamy wtedy okrąg długości 1, którego punkty ponumerowane są liczbami rzeczywistymi od 0 do 1 (tyle że jedynkę skleiliśmy z zerem). Dla takiego okręgu oraz $\alpha \in (0,1)$ określimy przekształcenie R_α następującym wzorem:

$$R_\alpha(x) = x + \alpha - \lfloor x + \alpha \rfloor.$$

Symbol części całkowitej $\lfloor \cdot \rfloor$, występujący w tej definicji, zapewnia, że gdy liczba $x+\alpha$ przekracza 1, przekształcenie R_α umieszcza ją z powrotem na odcinku $[0,1]$ w takiej samej odległości od 0, w jakiej liczba $x+\alpha$ znajduje się „na prawo" od 1. Z tego względu przekształcenie R_α możemy wyobrażać sobie jako przesuwanie punktów naszego okręgu o odcinek α (rys. 2). Jeżeli α jest liczbą wymierną, którą możemy zapisać w postaci ułamka nieskracalnego $\frac{p}{q}$, nietrudno będzie przekonać się, że po q-krotnym wykonaniu przekształcenia R_α każdy punkt okręgu wróci na swoje wyjściowe miejsce. Możemy tę *własność powracania* wyrazić w mądry sposób, mówiąc, że dla dowolnego punktu x_0, leżącego na okręgu, jego *dodatnia orbita*

$$\mathcal{O}^+(x_0) = \{R_\alpha(x_0), R_\alpha^2(x_0), R_\alpha^3(x_0), \ldots\}$$

przechodzi przez punkt x_0 (oznaczamy $R_\alpha^2(x_0) = R_\alpha(R_\alpha(x_0)) = R_{2\alpha}(x_0)$, $R_\alpha^3(x_0) = R_\alpha(R_{2\alpha}(x_0)) = R_{3\alpha}(x_0)$ itd.). Dla α niewymiernego tak sformułowana własność powracania nie zachodzi, nie sposób się jednak oprzeć wrażeniu, że w wyniku wielokrotnego przekształcania punkt x_0 powróci „w pobliże" swego położenia wyjściowego. Możemy to wyrazić następującym stwierdzeniem



Rys. 2. Obrót na okręgu.

> **Własność powracania:** Dla dowolnego punktu początkowego x_0 i dowolnego jego otoczenia U orbita $\mathcal{O}^+(x_0)$ przecina U.

Używając mądrych słów, moglibyśmy powiedzieć, że R_α ma własność *topologicznej tranzytywności* oraz że jest przekształceniem *prawie okresowym.*

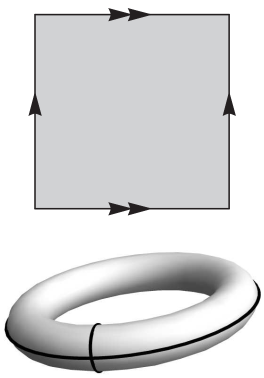
Skośny obrót torusa. Innym prostym przykładem zbioru nieskończonego jest kwadrat o boku 1. Żeby nie kłopotać się jego brzegiem, wykonamy operację podobną do sklejania końców odcinka, tyle że teraz należy skleić przeciwległe boki tak, by

*Instytut Matematyki, Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

kierunki strzałek na rysunku 3 się zgadzały. W ten sposób otrzymujemy torus. Punkty tego torusa możemy opisać dwiema współrzędnymi (x, y) odpowiednich punktów kwadratu, przy czym $0 \leqslant x, y < 1$. Na torusie możemy zdefiniować następujące przekształcenie:

$$T(x, y) = (x, x + y - \lfloor x + y \rfloor)$$

przyporządkowujące danemu punktowi torusa pewien inny punkt. Ponieważ współrzędna x nie zmienia się przy tym przekształceniu, działanie T sprowadza się do przesuwania punktów odcinka $x = \mathrm{const}$ o x „w górę” (lub, równoważnie, obrotu odpowiedniego okręgu o x), a zatem przekształcenia rozważanego w poprzednim przykładzie. Wynika stąd, że sformułowana powyżej własność powracania jest spełniona także dla przekształcenia T.

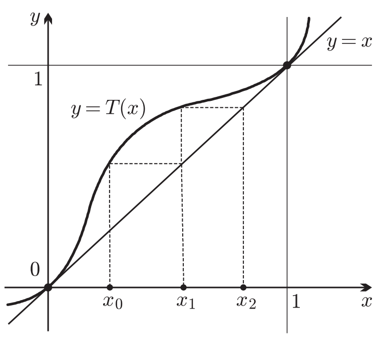


Rys. 3. Sklejenie przeciwległych boków kwadratu zgodnie z kierunkiem strzałek daje torus.

Siodło–węzeł na okręgu. Po tej rozgrzewce możemy przystąpić do analizy nieco trudniejszego przykładu. Rozważmy przekształcenie $T : [0, 1) \to [0, 1)$ określone wzorem:

$$T(x) = x + \frac{1}{8}\sin^2(\pi x).$$

Możemy uważać je za różnowartościowe przekształcenie okręgu na siebie. Jak wyglądają orbity tego przekształcenia? Najprościej przekonać się o tym, rysując wykres $T(x)$ i pamiętając, że $T^n(x) = T(T^{n-1}(x))$. Wynik iterowania przekształcenia T dla pewnego dowolnie wybranego punktu x_0 przedstawiony jest na rysunku 4. Widzimy, że dla dowolnego punktu początkowego $x_0 \neq 0$ orbita $\mathcal{O}^+(x_0)$ składa się z wyrazów ciągu $x_n = T^n(x_0)$, który jest zbieżny do… No właśnie, powiedzielibyśmy odruchowo, że jest zbieżny do 1, ale utożsamiliśmy jedynkę z zerem. Widzimy zatem, że punkt 0 ma ciekawą własność: odpycha punkty leżące odeń na prawo, a przyciąga te leżące na lewo. Przez analogię do sytuacji, z jakimi spotykamy się przy przekształceniach dwuwymiarowych, możemy nazwać go punktem typu *siodło–węzeł*.



Rys. 4. Wykres funkcji

$$T(x) = x + \frac{1}{8}\sin^2(\pi x)$$

oraz graficzny sposób znajdowania wartości kolejnych iteracji tego przekształcenia.

Łatwo zauważyć, że jedynie jednopunktowa orbita $\mathcal{O}^+(0) = \{0\}$ punktu 0 ma rozważaną poprzednio własność powracania. Dla $x_0 \neq 0$ orbita $\mathcal{O}^+(x_0)$ rozmija się z dostatecznie małym otoczeniem punktu x_0.

Miara. Na podstawie trzech przykładów doszliśmy do wniosku, że jedne przekształcenia mają własność powracania, a inne jej nie mają, przynajmniej w wersji, jaką podaliśmy. Czy nie da się lepiej? Czy można sformułować jakieś ogólniejsze twierdzenie dotyczące powracania? Okazuje się, że można. Niezbędne będzie do tego pojęcie miary zbioru, a dokładniej miary probabilistycznej.

Sama nazwa wskazuje na to, że pojęcie miary wprowadzono po to, by określać, jak „duży” jest zbiór. Ścisła definicja miary jest dość techniczna, choć intuicyjna, ograniczymy się zatem do podania własności miary. Otóż *miara* na zbiorze X jest funkcją określoną na pewnej rodzinie podzbiorów X o odpowiednich własnościach. Funkcja ta, którą będziemy oznaczać przez μ, spełnia:

a) $\mu(\varnothing) = 0$,
b) dla $A \subset B$ zachodzi $\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$,
c) jeśli $A_1, A_2, \ldots$ są parami rozłączne, to $\mu(\bigcup A_i) = \sum \mu(A_i)$.

Miarę nazywamy *probabilistyczną*, jeśli $\mu(X) = 1$.

Nikt nie zdziwi się chyba, że dobrą miarą dla odcinka jest jego długość, miarą dla (otwartego) podzbioru płaszczyzny – jego pole. Rozszerzenie tej intuicji na bardziej złożone przypadki prowadzi do pojęcia *miary Lebesgue'a*, w które nie będziemy się bardziej szczegółowo zagłębiać. Istnieje wszakże jeszcze jeden prosty przykład miary. Każda gospodyni prowadząca tzw. salon wie, że o jego randze decyduje nie ogólna liczba gości, lecz liczba gości znamienitych. Najprostszym odpowiednikiem takiego pomysłu jest wyróżnienie w zbiorze X pewnego punktu x_0 i powiedzenie, że $\mu(A) = 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x_0 \in A$, a w przeciwnym przypadku $\mu(A) = 0$. Taką miarę nazywamy *miarą Diraca* i oznaczamy δ_{x_0}; jej uogólnienie na dowolną skończoną liczbę wyróżnionych punktów jest oczywiste.

Przeciwobrazem zbioru A przy przekształceniu $T : X \to X$ nazywamy zbiór $T^{-1} = \{x \in X : T(x) \in A\}$. Symbol T^{-n} oznacza przeciwobraz przy przekształceniu T^n.

Dla przekształcenia $T : X \to X$ miara μ jest *niezmiennicza*, jeśli $\mu(T^{-1}(A)) = \mu(A)$. Dla obrotu na okręgu, R_α, oczywistym przykładem miary niezmienniczej jest miara Lebesgue'a, w szczególności długość odcinka nie zmienia się przy równomiernym przesunięciu wszystkich punktów. Ale dla obrotu postaci $R_{p/q}$ są jeszcze inne miary niezmiennicze – postaci

$$(*) \qquad \mu = \frac{1}{q}(\delta_{x_0} + \delta_{x_0 + \frac{1}{q}} + \ldots + \delta_{x_0 + \frac{q-1}{q}}).$$

Jeśli obrót jest niewymierny, jedyną miarą niezmienniczą jest miara Lebesgue'a. Ma ona wówczas następującą

> **Własność ergodyczności:** Jeśli $T^{-1}(A) = A$, to $\mu(A) = 0$ lub $\mu(A) = 1$; jedyne podzbiory niezmiennicze – zbiór pusty i cały okrąg – są trywialne w sensie miarowym.

W przypadku skośnego obrotu torusa naturalną miarą niezmienniczą dla T jest miara Lebesgue'a: prostokąt $[a, b] \times [c, d]$ jest przekształcany na równoległobok o wysokości $b - a$ i długości podstawy $d - c$. Ale istnieją też miary postaci

$$\mu([a, b] \times [c, d]) = \delta_{x_0}([a, b]) \cdot \mu_1([c, d]),$$

gdzie μ_1 jest miarą Lebesgue'a na okręgu (miary „skupione" na okręgu danym przez $x = x_0$) lub, dla $x_0 = p/q$, miarą daną wzorem $(*)$.

Interesują nas często „typowe" własności, spełnione dla *prawie każdego* obiektu. Istnieją dwa sposoby rozumienia tego zwrotu: „prawie każdy" oznacza każdy z wyjątkiem elementów skończonego zbioru punktów lub każdy z wyjątkiem elementów pewnego zbioru miary zero. Będziemy się dalej posługiwać drugim znaczeniem tego zwrotu. Możemy teraz sformułować pewne bardzo ważne twierdzenie.

Twierdzenie Poincarégo o powracaniu. *Niech przekształcenie $T : X \to X$ zachowuje probabilistyczną miarę μ. Wtedy dla każdego zbioru A o mierze $\mu(A) > 0$ prawie każdy punkt $x_0 \in A$ powraca do A, tzn. dla pewnego $n > 0$ zachodzi $T^n(x_0) \in A$.*

Dowód. Niech B będzie zbiorem tych punktów A, które nigdy nie powracają do A. W szczególności, dla $n > 0$ i $x \in B$ mamy $T^n(x) \notin B$, czyli $x \notin T^{-n}(B)$, a więc $T^{-n}(B) \cap B = \varnothing$. Stąd

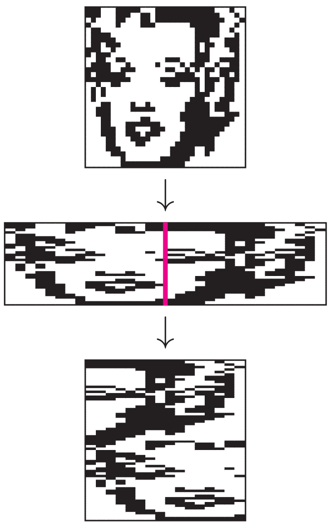
$$T^{-1}(B) \cap T^{-1-n}(B) = T^{-1}(T^{-n}(B) \cap B) = T^{-1}(\varnothing) = \varnothing.$$

Analogicznie, dla dowolnego $k \in \mathbb{N}$ zachodzi $T^{-k}(B) \cap T^{-k-n}(B) = \varnothing$. Zatem zbiory postaci $T^{-n}(B)$ są parami rozłączne oraz mają taką samą miarę. Gdyby zachodziło $\mu(B) > 0$, to z własności c) w definicji miary mielibyśmy $\mu(\bigcup T^{-n}(B)) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu(B) = \infty$, co byłoby sprzeczne z tym, że $\bigcup T^{-n}(B) \subset X$ oraz $\mu(X) = 1$. Musi zatem zachodzić $\mu(B) = 0$. $\square$

Teraz możemy na nowo rozważyć siodło–węzeł na okręgu. Zero musi się znajdować w każdym podzbiorze $A \subset X$ o dodatniej mierze niezmienniczej. Ale wtedy zwrot *prawie każdy punkt* $x_0 \in A$ oznacza, że $x_0 = 0$. Ten punkt nie opuszcza zbioru A.

Przekształcenie piekarza. Omówione na wstępie przykłady ilustrują dość szczególne mechanizmy powracania. Warto uzupełnić tę listę jeszcze jednym przykładem. Rozważmy przekształcenie kwadratu jednostkowego dane wzorem

$$T(x, y) = \begin{cases} \left(2x, \frac{y}{2}\right) & \text{dla } x < \frac{1}{2}, \\ \left(2x - 1, \frac{y+1}{2}\right) & \text{dla } x \geqslant \frac{1}{2}. \end{cases}$$



Rys. 5. Przekształcenie piekarza.

Działanie tego przekształcenia pokazano na rysunku 5: spłaszcza i rozciąga ono wyjściowy kwadrat do prostokąta o podstawie 2 i wysokości $\frac{1}{2}$, następnie rozcina uzyskany prostokąt na dwa prostokąty o podstawie 1, a w końcu układa te prostokąty jeden na drugim, tak że znowu powstaje kwadrat jednostkowy. Z uwagi na to rozciąganie i ściskanie (operacje doskonale znane każdemu, kto kiedykolwiek wyrabiał ciasto drożdżowe) przekształcenie piekarza zachowuje (dwuwymiarową) miarę Lebesgue'a. Okazuje się, że przekształcenie to ma następującą

> **Własność mieszania:** $\lim_{n\to\infty} \mu(T^{-n}(A) \cap B) = \mu(A) \cdot \mu(B)$, czyli po dużej liczbie iteracji przekształcenia T obraz $T^n(A)$ dowolnego zbioru A rozkłada się prawie równomiernie po całym kwadracie.

Własność mieszania jest silniejsza od własności ergodyczności; ta druga wynika z pierwszej. W szczególności obrót niewymierny na okręgu nie jest mieszający, chociaż jest ergodyczny.

Podsumowanie. Chociaż dowód twierdzenia Poincarégo o powracaniu wydaje się oczywisty i mało subtelny, twierdzenie to wywoływało (i najwidoczniej nadal wywołuje) dyskusje natury filozoficznej. Są one najczęściej związane z próbami zastosowania go do układów złożonych z dużej liczby cząstek – standardowym przykładem jest gaz skupiony w połówce zbiornika, z którego usuwamy przegrodę. Tymi tematami zajmiemy się w drugiej części artykułu.