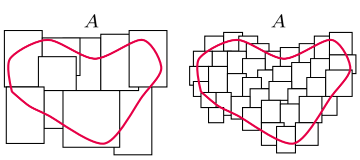
Miara

Człowiek to istota nie tylko myśląca, ale i *mierząca* – można by rzec górnolotnie, że mierzenie (rozmiarów wrogiej armii, zaopatrzenia spichrzów, stanu skarbca itp.) leży u podstaw naszej cywilizacji. W języku matematyki **miara** jest definiowana przez następujące, zdroworozsądkowe warunki. Po pierwsze, jest to *funkcja*, która podzbiorom pewnej przestrzeni przyporządkowuje liczby nieujemne (np. miarą pewnego podzbioru przestrzeni powietrznej ograniczonej balonikiem jest 100 cm^3). Po drugie, jakąkolwiek przestrzeń rozpatrujemy, jej pusty podzbiór ma miarę 0 (tak jak pusty skarbiec czy nienapompowany balonik). Po trzecie, jeśli połączę wiele *rozłącznych* podzbiorów w jeden, to miara tak powstałego podzbioru ma być sumą miar podzbiorów wyjściowych (tutaj „wiele” może również oznaczać „przeliczalnie wiele”, szczegóły można znaleźć w artykułach Michała Korcha i Marty Szumańskiej w Δ^4_{19}).

Przypuśćmy, że μ jest miarą określoną na wszystkich podzbiorach $\mathbb{R}$, która jest dodatnia i skończona na odcinkach oraz niezmiennicza ze względu na przesunięcia. Podzielmy odcinek $[0,10]$ na części w taki sposób, że dwie liczby należą do jednej części tylko wtedy, gdy różnica między nimi jest wymierna. Dla przykładu, liczby 2 i 7,3 są w tej samej części, ale w innej części niż $\sqrt{5}$. Niech $\mathcal{V} \subseteq [0,10]$ będzie zbiorem, do którego wybraliśmy dokładnie jednego reprezentanta z każdej części. Ustawmy wszystkie liczby wymierne z przedziału $[-10,10]$ w nieskończony ciąg $(q_n)_{n=1}^{\infty}$ i niech $\mathcal{V}_n$ będzie zbiorem $\mathcal{V}$ przesuniętym o q_n. Zbiory $\mathcal{V}_n$ są parami rozłączne, ich suma zawiera odcinek $[0,10]$, ale jest zawarta w $[-10,20]$ (dlaczego?). Ponieważ wszystkie zbiory $\mathcal{V}_n$ mają tę samą miarę, to jeśli wynosi ona 0, to odcinek $[0,10]$ musiałby mieć miarę 0, a jeśli jest ona dodatnia, to odcinek $[-10,20]$ miałby miarę nieskończoną. W obu przypadkach dostajemy sprzeczność. Zbiór $\mathcal{V}$ nazywamy **zbiorem Vitaliego**.

Czy każdy podzbiór dowolnej przestrzeni możemy zmierzyć? Okazuje się, że mogą być z tym problemy. Dla przykładu, nie istnieje miara μ określona na wszystkich podzbiorach zbioru liczb rzeczywistych w taki sposób, że miara dowolnego odcinka jest dodatnia i skończona oraz przesuwając zbiór na prostej, nie zmieniamy jego miary (uzasadnienie na marginesie). Ważne jest zatem, aby definiując miarę, zaznaczyć, jaka jest jej *dziedzina*, czyli jakie zbiory są względem niej **mierzalne**.

Jak w takim razie możemy zdefiniować miarę – poza trywialnym przypadkiem **miary liczącej**, która podzbiorom zbioru przeliczalnego przyporządkowuje liczbę elementów? Z pomocą przychodzi nam pojęcie **miary zewnętrznej**. Jest to nieujemna funkcja ν określona na *wszystkich* podzbiorach danej przestrzeni, która spełnia warunki: (a) $\nu(\emptyset)=0$, (b) jeśli $A \subseteq B$, to $\nu(A) \leqslant \nu(B)$, (c) miara zewnętrzna „połączenia” dowolnie wielu zbiorów (niekoniecznie rozłącznych) jest nie większa od sumy miar zewnętrznych tych zbiorów. Jeśli znajdziemy miarę zewnętrzną (warunki są łagodniejsze od tych, które definiują miarę!), to możemy zapytać o zbiory A, które są dobrymi „rozdzielnikami”, to znaczy dla dowolnego podzbioru S badanej przestrzeni zachodzi $\nu(S \setminus A) + \nu(S \cap A) = \nu(S)$. Mówimy wówczas, że zbiór A spełnia **warunek Carathéodory'ego** względem ν. Okazuje się, że jeśli ograniczymy ν do zbiorów spełniających warunek Carathéodory'ego względem niej, to otrzymamy miarę (jak już wspomnieliśmy, określenie dziedziny przy definiowaniu miary jest bardzo istotne!).



Coraz dokładniejsze pokrycia zbioru A prostymi prostokątami dają coraz lepsze przybliżenie jego miary zewnętrznej λ^*.

Uf, zrobiło się bardzo abstrakcyjnie – zobaczmy, jak to działa na przykładzie. Co to jest pole powierzchni, każdy widzi, ale mało kto potrafiłby je zdefiniować w sposób zadowalający matematyka (Czytelniku, jeśli nie wiesz jak, spróbuj przez chwilę uczynić to sam!). Zacznijmy od zdefiniowania pola prostokąta o bokach równoległych do osi ustalonego układu współrzędnych (taki prostokąt nazwiemy „prostym”). Dla prostego prostokąta $[a_1,b_1] \times [a_2,b_2]$ określamy pole zgodnie z naszymi oczekiwaniami, czyli $(b_1-a_1)(b_2-a_2)$. Dla dowolnie ustalonego podzbioru płaszczyzny A rozważmy teraz wszystkie możliwe jego pokrycia przeliczalną liczbą prostych prostokątów, a dla każdego takiego pokrycia zsumujmy pola tych prostokątów. *Kres dolny* (czyli największe ograniczenie dolne) tych sum oznaczmy jako $\lambda^*(A)$. Można udowodnić, że λ^* jest miarą zewnętrzną na płaszczyźnie. Jeśli więc ograniczymy ją do zbiorów, które spełniają względem niej warunek Carathéodory'ego, dostaniemy miarę nazywaną dwuwymiarową **miarą Lebesgue'a** – i to jest dla matematyka porządnie zdefiniowane pole. Oczywiście, należałoby się jeszcze zastanowić, jakie właściwie zbiory są mierzalne względem miary Lebesgue'a (warunek Carathéodory'ego nie jest bowiem szczególnie wygodny). Jedna z charakteryzacji mówi, że są to zbiory będące złączeniem co najwyżej przeliczalnej liczby zbiorów domkniętych oraz zbioru, którego miara zewnętrzna λ^* wynosi 0. Brzmi bardzo skomplikowanie, ale oznacza między innymi, że możemy śmiało mierzyć pola wszystkich figur geometrycznych znanych ze szkoły średniej. I jak tu nie wierzyć w słowa Goethego: *Matematycy są jak Francuzi: cokolwiek im się powie, od razu przekładają to na swój własny język i wówczas staje się to zupełnie czymś innym.*

Łukasz RAJKOWSKI