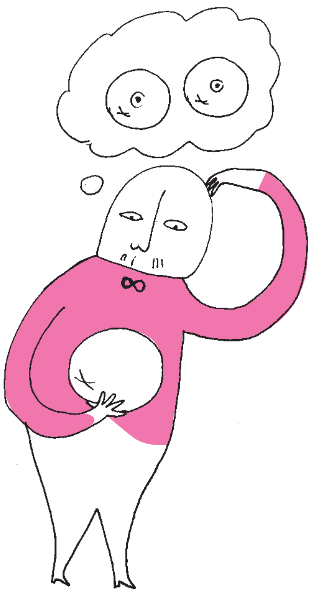


O kul rozmnażaniu

Paradoks Banacha–Tarskiego (1924 r.). *Kulę można rozłożyć na skończenie wiele części, z których da się zbudować dwie takie same kule.*

Rozkład w używanym tu sensie to dowolny podział figury na rozłączne części (niekoniecznie ma ich być skończenie wiele). Dopuszczamy zatem części o dowolnie dziwnych kształtach, na przykład jednopunktowe lub niemierzalne. Jeśli figurę A możemy rozłożyć w tym sensie na części, z których następnie można złożyć figurę B, to mówimy, że A i B są *równoważne przez rozkład* i oznaczamy to $A \sim B$. Nietrudno sprawdzić, że rzeczywiście jest to relacja równoważności. Okazuje się, że takie podziały nie muszą zachowywać miar figur i stąd właśnie biorą się pozorne paradoksy, a dokładniej mówiąc, fakty sprzeczne z naszą intuicją.

Zbiór E jest *paradoksalny*, jeśli zawiera rozłączne podzbiory A, B takie, że $A \sim E$ oraz $B \sim E$, czyli, mówiąc obrazowo, jeśli z pewnych dwóch rozłącznych części zbioru możemy zbudować dwie jego pełnowartościowe kopie. Chodzi więc o takie rozkłady, które są sprzeczne z naszą intuicją dotyczącą pola lub objętości. W dalszej części tekstu rozważamy tylko rozkłady skończone.

Po wyjaśnieniu, na czym polega problem, kolej na wskazanie narzędzi – będą właściwie dwa: łatanie dziur i grupa wolna.

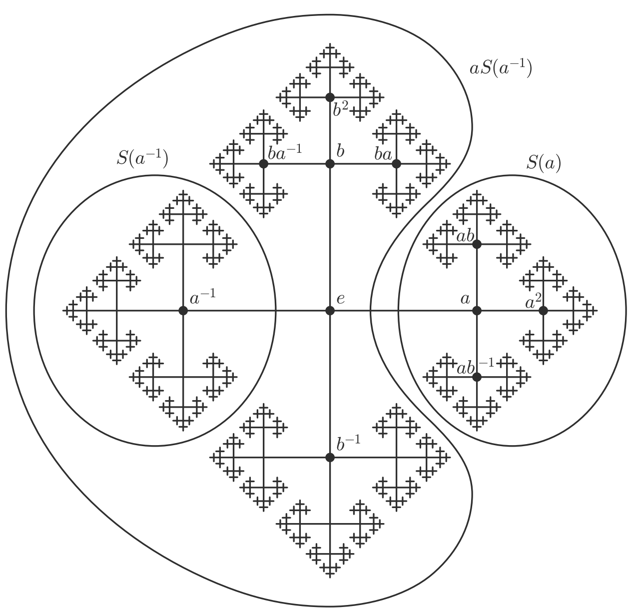
Grupa to zbiór G z określonym w nim działaniem $\times$, które ma element neutralny 1 (czyli dla każdego $z \in G$ jest $z \times 1 = 1 \times z = z$), jest łączne (czyli $z \times (t \times u) = (z \times t) \times u$) i dla każdego $z \in G$ istnieje element odwrotny z^{-1} (czyli $z \times z^{-1} = z^{-1} \times z = 1$). Często zamiast $x \times y$ piszemy xy. Przykładami grup są np. zbiór liczb całkowitych z dodawaniem lub zbiór wszystkich izometrii przestrzeni trójwymiarowej ze składaniem.

Grupa G *działa na zbiorze* X, jeśli dla dowolnych $g \in G$, $x \in X$ mamy zdefiniowane działanie $g(x) \in X$, spełniające warunki $g_2(g_1(x)) = (g_2g_1)(x)$ oraz $id(x) = x$. Na przykład grupa G_3 izometrii przestrzeni $\mathbb{R}^3$ działa na zbiorze $X = \mathbb{R}^3$ tak: $g(x)$ to obraz punktu x przy izometrii g.

W przypadku grupy G przekształceń jakiegoś zbioru X orbitą dowolnego elementu $x \in X$ nazywamy zbiór $\{g(x) : g \in G\}$. Orbity dwóch punktów są równe lub rozłączne.

Łatanie dziur pokażemy na przykładzie dziury w okręgu. Rozłożymy okrąg S^1 bez punktu na dwie części, zastosujemy do nich odpowiednio dobrane obroty i w rezultacie uzyskamy cały okrąg. Niech T będzie brakującym punktem okręgu, φ zaś niech będzie obrotem wokół środka o ustalony kąt niewspółmierny z 2π. Wówczas ciąg $\varphi(T), \varphi^2(T), \varphi^3(T), \ldots \in S^1$ jest nieskończony i są to różne punkty. Niech to będzie pierwszy z naszych dwóch zbiorów, a pozostała część okręgu niech będzie drugim. Zauważmy, że obrót w przeciwną stronę o ten sam kąt, czyli φ^{-1}, przeprowadza powyższy ciąg na ciąg $T, \varphi(T), \varphi^2(T), \ldots$, a więc pozwala załatać dziurkę. Pozostała część okręgu jest nieruchoma (to też obrót). Stąd $S^1 \sim S^1 \setminus \{T\}$.

Grupa wolna F_2 o dwóch generatorach a i b to zbiór słów (czyli skończonych ciągów znaków) nad alfabetem a, b, a^{-1}, b^{-1}, zredukowanych (czyli bez fragmentów postaci xx^{-1}), z elementem neutralnym e (słowo puste), bez relacji (dwa zredukowane słowa o różnym zapisie są różne) i z działaniem konkatenacji (dopisywania). Zauważmy, że ponieważ rozpatrujemy tylko słowa skończone, grupa F_2 ma przeliczalnie wiele elementów. Rysuje się je często jako wierzchołki grafu (rysunek). Taki graf nie ma cykli, ponieważ w grupie wolnej nie ma relacji.



Niech $S(x)$ oznacza zbiór słów zaczynających się literą x. Zauważmy, że F_2 jest rozłączną sumą

$$\{e\} \cup S(a) \cup S(b) \cup S(a^{-1}) \cup S(b^{-1}).$$

Jednocześnie

$$F_2 = S(a) \cup aS(a^{-1}) \quad \text{oraz} \quad F_2 = S(b) \cup bS(b^{-1}).$$

Grupa wolna F_2 jest zatem paradoksalna (dopisanie słowa na początku drugiego słowa to działanie grupy F_2 na zbiorze swoich elementów).

Wolną podgrupę F_2 możemy znaleźć w grupie G_3 izometrii przestrzeni trójwymiarowej. Konkretnie, niech α będzie kątem dwuściennym czworościanu foremnego, czyli $\alpha = \arccos\left(\frac{1}{3}\right)$. Niech a oraz b będą obrotami $\mathbb{R}^3$ o kąt α w odpowiednio dobranym kierunku i odpowiednio wokół osi x oraz z. Można sprawdzić, że takie a i b generują grupę wolną F_2.

Od grupy do zbioru. Umiemy wykazać, że F_2 jest paradoksalna i umiemy wskazać podgrupę G_3 izomorficzną z F_2. Docelowo chcielibyśmy jednak skonstruować nie grupę, lecz zbiór paradoksalny.

Okazuje się, że paradoksalność grupy daje się przenieść na zbiór, na którym ta grupa działa. Prześledźmy tę ogólną prawidłowość na przykładzie działania grupy $F_2 \subseteq G_3$ na sferę S^2 (o środku w początku układu współrzędnych) z wyłączonym zbiorem D tych punktów, w których osie obrotów, z jakich się składa F_2, przebijają tę sferę.

Pewnik wyboru (przyjmowany aksjomatycznie w teorii mnogości) gwarantuje istnienie zbioru (zwanego selektorem), do którego należy dokładnie po jednym elemencie z każdego zbioru danej rodziny niepustych zbiorów rozłącznych.

$S^2 \setminus D$ rozpada się na orbity przy działaniu F_2. Wybierzmy (tu działa *pewnik wyboru* i bez niego ani rusz) zbiór M reprezentantów tych orbit i zastosujmy do niego grupę F_2. Zauważmy, że tak otrzymane przeliczalnie wiele rozłącznych obrazów zbioru M daje w sumie całe $S^2 \setminus D$. Odpowiednio je grupując i przemieszczając, uzyskujemy paradoksalny rozkład $S^2 \setminus D$.

Grupa wolna już swoją rolę odegrała, pora na łatanie dziur. Jak już zauważyliśmy, grupa F_2 jest przeliczalna, a każda oś obrotu przebija sferę w dwóch punktach, stąd zbiór D również jest przeliczalny. Stosując opisaną wyżej metodę łatania dziur, można wykazać, że $S^2 \setminus D \sim S^2$.

Każdy zapewne już dostrzegł, że zupełnie w ten sam sposób można wykazać, że cała przestrzeń $\mathbb{R}^3$ jest paradoksalna.

Więcej wysiłku wymaga wykazanie, że nie tylko kula jest równoważna przez rozkład z dwiema takimi samymi kulami, lecz także, że można rozciąć kulę na pięć części, które po przemieszczeniu ułożą się w dwie kule identyczne z pierwszą.

Ogólniejszy wynik głosi, że równoważne przez rozkład są dowolne dwa ograniczone podzbiory $\mathbb{R}^3$ o niepustym wnętrzu.

Dokończenie dowodu paradoksu Banacha–Tarskiego. Wiemy już, że dla odpowiednio dobranego zbioru D zbiór $S^2 \setminus D$ jest paradoksalny, oraz że $S^2 \setminus D \sim S^2$. Ponieważ zbiór równoważny ze zbiorem paradoksalnym też jest paradoksalny, więc **sfera jest paradoksalna**.

Zauważmy, że kula bez środka to „cebulka” złożona ze sfer współśrodkowych. Skoro każda z nich jest paradoksalna, to kula bez środka również jest paradoksalna (bo punkty każdego promienia możemy skleić i przemieszczać wspólnie).

Weźmy teraz dowolny okrąg przechodzący przez środek kuli T i całkowicie w niej zawarty. Wiemy, że $S^1 \sim S^1 \setminus \{T\}$, zatem umiemy załatać dziurkę, czyli kula bez środka jest równoważna całej kuli. A to kończy dowód, że **kula jest paradoksalna**.

O tym, że powyższą metodą nie można uzyskać analogicznych paradoksalnych rozkładów w $\mathbb{R}^1$ ani w $\mathbb{R}^2$ łatwo się przekonać, sprawdzając, że F_2 nie jest podgrupą grupy G_1 izometrii prostej ani grupy G_2 izometrii płaszczyzny. Przyjrzyjmy się dokładniej, dlaczego tak jest.

Izometrie prostej to przesunięcia i symetrie względem punktu. Wobec tego kwadrat każdej izometrii jest przesunięciem, przesunięcia zaś są przemienne. Stąd dla dowolnych dwóch izometrii g, h zachodzi relacja $g^2h^2g^{-2}h^{-2} = id$, czyli w G_1 nie ma podgrupy wolnej rzędu 2.

Dowód twierdzenia Chaslesa można znaleźć np. w *Delcie* 11/2015.

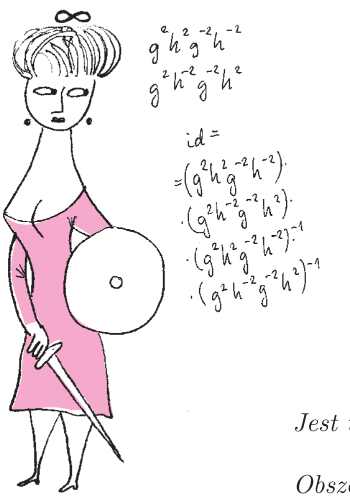
Na płaszczyźnie każda izometria jest złożeniem co najwyżej trzech symetrii osiowych (twierdzenie Chaslesa). Wynika z tego, że kwadraty elementów G_2 to izometrie parzyste, a więc przesunięcia lub obroty. Wobec tego dla dowolnych dwóch izometrii g, h, złożenia $g^2h^2g^{-2}h^{-2}$ oraz $g^2h^{-2}g^{-2}h^2$ są przesunięciami (bo kąty ewentualnych obrotów się redukują). Przesunięcia są przemienne, zatem

$$(g^2h^2g^{-2}h^{-2})(g^2h^{-2}g^{-2}h^2)(g^2h^2g^{-2}h^{-2})^{-1}(g^2h^{-2}g^{-2}h^2)^{-1} = id,$$

co po uproszczeniu daje relację

$$g^2h^2g^{-2}h^{-2}g^2h^{-2}g^{-2}h^4g^2h^{-2}g^{-2}h^{-2}g^2h^2g^{-2} = id,$$

czyli w G_2 także nie ma podgrupy wolnej rzędu 2.



Ale innej metody na znalezienie paradoksalnych rozkładów w $\mathbb{R}^1$ i $\mathbb{R}^2$ nie ma, albowiem Stefan Banach udowodnił, że podane wyżej tożsamości pociągają za sobą istnienie *miary uniwersalnej*, czyli mierzącej wszystkie zbiory i będącej rozszerzeniem zwykłego mierzenia długości czy pola.

Bo przecież zbiory paradoksalne nie mogą mieć miary w zwykłym sensie, o czym, jak sądzę, nikogo przekonywać nie trzeba.

Jest to streszczenie skrótu świetnego zapisu znakomitego odczytu Joanny JASZUŃSKIEJ na XXXVII Szkole Matematyki Poglądowej.
Obszerniejszą wersję można znaleźć na stronie `www.msn.uph.edu.pl/smp/?strona=msn`