

Zadanie 766 – pełne rozwiązanie

Piotr KUMOR

Zadanie M 766. Znaleźć liczbę rzeczywistą $M > \frac{5}{2}$ taką, że dla dowolnych liczb dodatnich a, b, c, d, e zachodzi nierówność:

$$\sqrt[5]{\frac{a}{b+c}} + \sqrt[5]{\frac{b}{c+d}} + \sqrt[5]{\frac{c}{d+e}} + \sqrt[5]{\frac{d}{e+a}} + \sqrt[5]{\frac{e}{a+b}} \geq M \quad (1)$$

Im większe M tym lepsze rozwiązanie.

Rozwiązanie: Udowodnimy, że dla dowolnych liczb dodatnich a, b, c, d, e zachodzi (ostra) nierówność (1) ze stałą $M = 3$. Oczywiście wartości $M = 3$ nie można zwiększyć.

Oznaczmy lewą stronę nierówności (1) przez $W = W(a, b, c, d, e)$. Można założyć, że $1 = a = \max\{a, b, c, d, e\}$. Jeżeli $\max\{b, c\} = b$ oraz $\max\{c, d\} = c$, to bez względu na to, która z liczb d, e jest większa, mamy:

$$W > \frac{1}{\sqrt[5]{2}} \left(\frac{1}{\sqrt[5]{b}} + \sqrt[5]{\frac{b}{c}} + \sqrt[5]{\frac{c}{\max\{d, e\}}} + \sqrt[5]{\max\{d, e\}} \right) \geq \frac{4}{\sqrt[5]{2}}. \quad (2)$$

Ponieważ $\frac{4}{\sqrt[5]{2}} \approx 3,48 > 3$, więc w tym przypadku $W > 3$. Pozostają trzy możliwe przypadki:

1. $\max\{b, c\} = b$ oraz $\max\{c, d\} = d$. Wtedy

$$W > \frac{1}{\sqrt[5]{2}} \left(\frac{1}{\sqrt[5]{b}} + \sqrt[5]{\frac{b}{d}} + \sqrt[5]{d} \right). \quad (3)$$

2. $\max\{b, c\} = c$ oraz $\max\{c, d\} = d$. Wtedy

$$W > \frac{1}{\sqrt[5]{2}} \left(\frac{1}{\sqrt[5]{c}} + \sqrt[5]{\frac{c}{d}} + \sqrt[5]{d} \right). \quad (4)$$

3. $\max\{b, c\} = c$ oraz $\max\{c, d\} = e$. Wtedy

$$W > \frac{1}{\sqrt[5]{2}} \left(\frac{1}{\sqrt[5]{c}} + \sqrt[5]{\frac{c}{e}} + \sqrt[5]{e} \right). \quad (5)$$

Okazuje się, że są one w pełni analogiczne. Załóżmy, że zachodzi przypadek 1.

Jeżeli $\frac{1}{\sqrt[5]{b}} + \sqrt[5]{\frac{b}{d}} + \sqrt[5]{d} \geq 3\sqrt[5]{2}$, to $W > 3$. Załóżmy więc, że

$\frac{1}{\sqrt[5]{b}} + \sqrt[5]{\frac{b}{d}} + \sqrt[5]{d} < 3\sqrt[5]{2}$. Prawdziwy jest podany niżej lemat:

Lemat. Jeżeli liczby rzeczywiste s, t spełniają nierówności: $0 < s \leq 1$, $0 < t \leq 1$ oraz nierówność $\frac{1}{s} + \frac{s}{t} + t < 3\sqrt[5]{2}$, to $\frac{1}{s} < \frac{41}{20}$ oraz $\frac{1}{t} < \frac{57}{25}$.

Dowód. Ponieważ $2\sqrt{s} \leq \frac{s}{t} + t$, więc $\frac{1}{s} + 2\sqrt{s} < 3\sqrt[5]{2}$. Niech $p = \frac{1}{\sqrt{s}}$. Mamy $q \leq p$ oraz $\frac{1}{s} + 2\sqrt{s} = p^2 + \frac{2}{p}$. Zatem $p^2 + \frac{2}{p} < 3\sqrt[5]{2}$. Funkcja zmiennej p : $p^2 + \frac{2}{p}$ jest rosnąca dla $1 \leq p$, zaś dla $p = \sqrt{\frac{41}{20}}$ jest $p^2 + \frac{2}{p} > 3,4468 > 3,4461 > 3\sqrt[5]{2}$. Zatem $p < \sqrt{\frac{41}{20}}$, więc $\frac{1}{s} = p^2 < \frac{41}{20}$. Nierówności $\frac{1}{t} < \frac{57}{25}$ dowodzimy podobnie: Ponieważ $\frac{2}{\sqrt{t}} < \frac{1}{s} + \frac{s}{t}$, więc $\frac{2}{\sqrt{t}} + t < 3\sqrt[5]{2}$ ($0 < t \leq 1$), więc $\frac{1}{\sqrt{t}} < \sqrt{\frac{57}{25}}$ (gdzie $\frac{1}{\sqrt{t}} = \sqrt{\frac{57}{25}}$ to $\frac{2}{\sqrt{t}} + t > 3,45 > 3\sqrt[5]{2}$). Zatem $\frac{1}{s} < \frac{41}{20}$ oraz $\frac{1}{t} < \frac{57}{25}$, więc lemat został udowodniony. $\square$

Natychmiastową konsekwencją lematu jest:

Wniosek. Jeżeli liczby rzeczywiste b, d spełniają nierówności: $0 < b \leq 1$, $0 < d \leq 1$ oraz nierówność $\frac{1}{\sqrt[5]{b}} + \sqrt[5]{\frac{b}{d}} + \sqrt[5]{d} < 3\sqrt[5]{2}$, to $\frac{1}{b} < 37$ oraz $\frac{1}{d} < 62$.

Liczby $s = \sqrt[5]{b}$ oraz $t = \sqrt[5]{d}$ spełniają bowiem założenia lematu, więc $\frac{1}{b} = \frac{1}{s^5} < \left(\frac{41}{20}\right)^5 < 37$ oraz $\frac{1}{d} = \frac{1}{t^5} = \left(\frac{57}{25}\right)^5 < 62$. Wniosek został udowodniony.

Mamy

$$W = \sqrt[5]{\frac{1}{b+c}} + \sqrt[5]{\frac{b}{c+d}} + \sqrt[5]{\frac{c}{d+e}} + \sqrt[5]{\frac{d}{e+1}} + \sqrt[5]{\frac{e}{1+b}}. \quad (6)$$

Niech $y = \max\{c, e\}$. Zatem

$$W \geq \sqrt[5]{\frac{1}{b+y}} + \sqrt[5]{\frac{b}{y+d}} + \sqrt[5]{\frac{c}{d+y}} + \sqrt[5]{\frac{d}{y+1}} + \sqrt[5]{\frac{e}{1+b}}. \quad (7)$$

Dalej

$$W > \sqrt[5]{\frac{1}{b+y}} + \sqrt[5]{\frac{b}{y+d}} + \sqrt[5]{\frac{d}{y+1}} + \sqrt[5]{\frac{y}{2}}, \quad (8)$$

bo nasze liczby nie przekraczają 1. Ostatnia nierówność zachodzi bez względu na to, która z liczb c, e jest większa (składnik odpowiadający mniejszej pomijamy, zostają więc cztery składniki).

Z nierówności między średnimi wynika, że:

$$\sqrt[5]{\frac{1}{b+y}} + \sqrt[5]{\frac{b}{y+d}} + \sqrt[5]{\frac{d}{y+1}} \geq 3 \sqrt[15]{\frac{bd}{(b+y)(d+y)(1+y)}}. \quad (9)$$

Zachodzi równość:

$$\frac{bd}{(b+y)(d+y)(1+y)} = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{b}y\right)\left(1 + \frac{1}{d}y\right)(1+y)}. \quad (10)$$

Na podstawie udowodnionego wyżej wniosku mamy nierówności:

$1 + 37y > 1 + \frac{1}{b}y$ oraz $1 + 62y > 1 + \frac{1}{d}y$. Zatem

$$\frac{1}{\left(1 + \frac{1}{b}y\right)\left(1 + \frac{1}{d}y\right)(1+y)} > \frac{1}{(1+37y)(1+62y)(1+y)}. \quad (11)$$

Wobec tego

$$\sqrt[5]{\frac{1}{b+y}} + \sqrt[5]{\frac{b}{y+d}} + \sqrt[5]{\frac{d}{y+1}} > 3 \sqrt[15]{\frac{1}{(1+37y)(1+62y)(1+y)}}, \quad (12)$$

czyli

$$W > \frac{3}{\sqrt[15]{(1+37y)(1+62y)(1+y)}} + \sqrt[5]{\frac{y}{2}}. \quad (13)$$

Prawdziwy jest następujący:

Fakt. Dla liczb rzeczywistych $0 < y < \frac{1}{32}$ zachodzi nierówność:

$$\frac{3}{\sqrt[15]{(1+37y)(1+62y)(1+y)}} + \sqrt[5]{\frac{y}{2}} > 3. \quad (14)$$

Prawdziwa jest też nierówność nieco mocniejsza:

$$\frac{3}{\sqrt[15]{(1+37y)(1+62y)(1+y)}} + \sqrt[5]{y} \cdot \frac{5}{6} > 3. \quad (15)$$

(Nieco mocniejsza, bo $\sqrt[5]{\frac{1}{2}} > \frac{5}{6}$). Dla dowodu ostatniej nierówności podstawmy $y = z^5$. Ponieważ $0 < y < \frac{1}{32}$, więc $0 < z < \frac{1}{2}$, zaś nierówność sprowadza się do wykazania, że wielomian $f(z)$:

$$f(z) = 18^{15} - (18 - 5z)^{15}(1 + 37z^5)(1 + 62z^5)(1 + z^5) \quad (16)$$

przyjmuje wartości dodatnie dla $0 < z < \frac{1}{2}$. W tym momencie musimy (chyba?) użyć komputera z programem matematycznym. Programy te mają gotowe funkcje (np. `realroot` w *Maple*), które obliczają pierwiastki wielomianów z dowolną dokładnością. Można więc z całą pewnością stwierdzić, że $f(z) > 0$ dla $0 < z < \frac{1}{2}$.

Ciekawe, że użycie takich funkcji nie jest tu konieczne. Podstawiając bowiem $z = \frac{x}{2x+1}$ (dla $0 < x$) widzimy, że nierówność $f(z) > 0$ jest równoważna nierówności $g(x) > 0$ (dla $0 < x$), gdzie:

$$g(x) = 18^{15}(1+2x)^{30} - (18+31x)^{15}((1+2x)^5 + 37x^5)((1+2x)^5 + 62x^5)((1+2x)^5 + x^5). \quad (17)$$

Stopień wielomianu $g(x)$ jest równy 30, a jego współczynniki to duże liczby całkowite (około 40 cyfrowe), więc ręczne obliczanie raczej (?) jest tu niemożliwe. Nadal potrzebny jest więc komputer, ale wystarczy samo obliczenie współczynników wielomianu $g(x)$ (nie trzeba używać wyrafinowanych funkcji do szacowania jego pierwiastków). Okazuje się bowiem, że $g(x) = xh(x)$, zaś wielomian $h(x)$ nie ma ujemnych współczynników. Zatem $h(x) > 0$ oraz $g(x) > 0$ dla $x > 0$.

Udowodniliśmy więc, że jeżeli $0 < y < \frac{1}{32}$, to zachodzi nierówność:

$$W > \frac{3}{\sqrt[15]{(1+37y)(1+62y)(1+y)}} + \sqrt[5]{y} \cdot \frac{5}{6} > 3. \quad (18)$$

Załóżmy więc teraz, że $y \geq \frac{1}{32}$, czyli $\sqrt[5]{y} \geq \frac{1}{2}$. Przypomnijmy, że:

$$W = \sqrt[5]{\frac{1}{b+c}} + \sqrt[5]{\frac{b}{c+d}} + \sqrt[5]{\frac{c}{d+e}} + \sqrt[5]{\frac{d}{e+1}} + \sqrt[5]{\frac{e}{1+b}}. \quad (19)$$

Liczby dodatnie b, c, d, e nie przekraczają 1, a także: $\max\{b, c\} = b$, $\max\{c, d\} = d$, $y = \max\{c, e\}$. Zatem:

$$W > \frac{1}{\sqrt[5]{2}} \left(\frac{1}{\sqrt[5]{b}} + \sqrt[5]{\frac{b}{d}} + \sqrt[5]{d} \right) > \frac{3}{\sqrt[5]{2}} + \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt[5]{2}} = \frac{7}{2} \frac{1}{\sqrt[5]{2}} > 3 \quad (20)$$

(bowiem $\frac{7}{2} \frac{1}{\sqrt[5]{2}} \approx 3,0469$). Dla wszystkich możliwych wartości y jest więc $W > 3$, co kończy dowód w przypadku 1. Przypadki 2. i 3. są w pełni analogiczne. Dowodzimy ich wykonując dokładnie te same rachunki co w przypadku 1., oczywiście zamieniając odpowiednio wyrazy ciągu b, c, d, e . W każdym więc możliwym przypadku jest $W > 3$. Dowód został zakończony.