Czy można usłyszeć kształt bębenka?

*Joanna JASIŃSKA**

*Studentka, Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

Każdy, komu choć raz zdarzyło się grać na gitarze lub innym instrumencie strunowym, dobrze wie, że na wysokość dźwięku ma wpływ między innymi długość struny. Uderzając w struny zbudowane z tego samego materiału i o tych samych grubościach, lecz o różnych długościach, otrzymamy dwie różne częstotliwości drgań, a więc dwa dźwięki o różnych wysokościach. A jak to jest z instrumentami perkusyjnymi? Czy na podstawie brzmienia drgającej membrany bębenka można powiedzieć coś o jego kształcie? Jedne z pierwszych prób odpowiedzi na to pytanie pochodzą od Marka Kaca. Żeby przybliżyć tematykę, jaką się zajmował, należy przyjrzeć się opisanemu zagadnieniu z perspektywy analizy matematycznej.

Przez Ω będę oznaczała otwarty, spójny podzbiór $\mathbb{R}^2$. Jest to model naszej membrany, która pod wpływem uderzenia będzie się odchylała. Aby móc ściśle odpowiedzieć na tytułowe pytanie, najpierw musimy matematycznie sformalizować „brzmienie bębenka". Niestety, w tym artykule nie mamy miejsca na dokładną analizę fizycznego modelu drgania membrany. Wynika z niego jednak, że od strony matematycznej brzmienie jest zdefiniowane przez pewien zbiór zwany widmem drgań i oznaczany przez $\Lambda(\Omega)$. Jest to zbiór wartości λ, dla których istnieje taka niezerowa funkcja $G\colon \Omega \to \mathbb{R}$ (określająca amplitudę drgań w różnych punktach membrany), że

- $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} G(x,y) = 0$ dla dowolnego punktu (x_0, y_0) leżącego na brzegu Ω (odpowiada to założeniu, że brzeg membrany jest nieruchomy; założenie to nazywa się *warunkiem brzegowym Dirichleta*),
- $\big(\Delta G\big)(x,y) = \lambda G(x,y)$ dla wszystkich $(x,y) \in \Omega$.

Definicja laplasjanu:
$$(\Delta G)(x,y) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}G(x,y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}G(x,y).$$

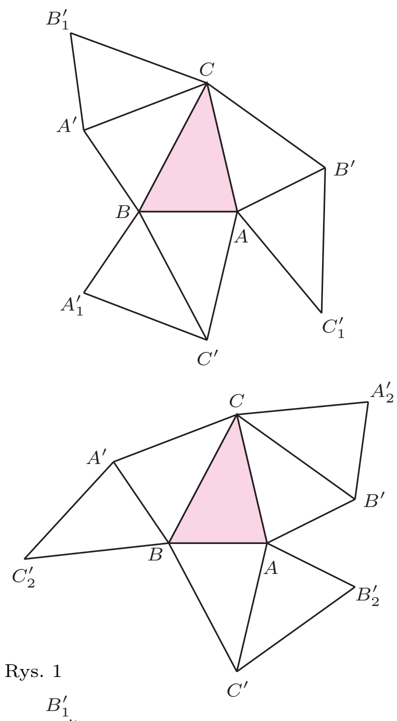
Symbolem Δ oznaczamy *laplasjan*, czyli pewien operator, który z jednych funkcji tworzy inne (podobnie jak np. operator różniczkowania $f \mapsto f'$). Czytelników zaznajomionych z cząstkowymi pochodnymi odsyłamy do definicji na marginesie. Do zrozumienia najistotniejszej części tego artykułu wystarcza jednak elementarna wiedza z geometrii oraz przyjęcie do wiadomości, że laplasjan jest

- *addytywny*: $\Delta(G + H) = \Delta G + \Delta H$,
- *niezmienniczy ze względu na izometrie*: jeśli $\tau : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ jest izometrią, to $\Delta(G \circ \tau) = (\Delta G) \circ \tau$.

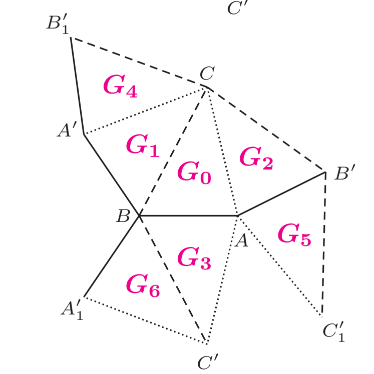
Izometria to dowolne przekształcenie, które nie zmienia odległości między punktami.

Fizycznie widmo drgań $\Lambda(\Omega)$ jest zbiorem częstotliwości, z jakimi może drgać uderzona membrana. Jeśli zatem udałoby się nam znaleźć dwie membrany o różnych kształtach (tj. dwa nieizometryczne obszary Ω_1 i Ω_2) i tym samym widmie drgań, otrzymalibyśmy negatywną odpowiedź na tytułowe pytanie. Właśnie w tej formie było ono zadane w 1966 roku przez Marka Kaca w jego artykule „Can one hear the shape of a drum?". Okazuje się, że odpowiedź faktycznie jest negatywna – istnieje już wiele przykładów, które potwierdzają, że nie da się usłyszeć kształtu bębenka. Pierwsze z nich były dosyć skomplikowane (jak na przykład konstrukcja Johna Milnora z 1964 roku: dwa nieprzystające 16-wymiarowe torusy o tym samym widmie drgań – z rozmaitych przyczyn nikt nie produkuje tego rodzaju bębenków...). Obecnie istnieją już konstrukcje dużo prostsze. Ta, którą przytoczymy, została podana w 1992 roku przez Carolyn Gordon, Davida L. Webba oraz Scotta Wolperta w artykule „One cannot hear the shape of a drum". Uzasadnimy, że przedstawione na rysunku 1 wielokąty $W_1 = AC_1'B'CB_1'A'BA_1'C'$ oraz $W_2 = AB'A_2'CA'C_2'BC'B_2'$ są dobrym przykładem tego, że kształtu bębenka nie da się usłyszeć... Powstały one z „posklejania" ze sobą siedmiu trójkątów przystających do trójkąta różnobocznego ABC. Kolejne punkty konstruujemy z trójkąta ABC poprzez symetrię. Niech $\sigma_{XY}(Z)$ oznacza obraz punktu Z w symetrii względem odcinka XY.

Tłumaczenie na język polski wspomnianego artykułu Marka Kaca ukazało się w „Wiadomościach Matematycznych" XIII (1971) i można je odnaleźć na stronie `wydawnictwa.ptm.org.pl`.



Rys. 1



Rys. 2. Jeśli funkcja G_i jest na powyższym rysunku napisana na trójkącie $\mathcal{T}$, to powstaje przez złożenie obcięcia funkcji G do $\mathcal{T}$ z izometrią przekształcającą ABC na $\mathcal{T}$

Wówczas:

$$\begin{aligned}
A' &= \sigma_{BC}(A), \quad & B' &= \sigma_{AC}(B), \quad & C' &= \sigma_{AB}(C)\\
A_1' &= \sigma_{BC'}(A), \quad & B_1' &= \sigma_{A'C}(B), \quad & C_1' &= \sigma_{AB'}(C)\\
A_2' &= \sigma_{CB'}(A), \quad & B_2' &= \sigma_{AC'}(B), \quad & C_2' &= \sigma_{A'B}(C)
\end{aligned}$$

Nasza argumentacja powinna składać się z dwóch kroków: najpierw należy uzasadnić, że powyższe wielokąty nie są przystające, a następnie, że ich wnętrza (oznaczane dalej odpowiednio przez Ω_1 oraz Ω_2) mają to samo widmo drgań. Łatwiejszą częścią dowodu jest wykazanie, że W_1 i W_2 nie są izometryczne. Pozostawiamy ją Pracowitemu Czytelnikowi do samodzielnego rozwikłania i przechodzimy do kroku drugiego.

Dowiedziemy, że wielokąty W_1 oraz W_2 są *izospektralne*, czyli mają takie samo widmo drgań. Ustalmy zatem $\lambda \in \Lambda(\Omega_1)$. Wykażemy, że jest ono również w $\Lambda(\Omega_2)$. Skoro $\lambda \in \Lambda(\Omega_1)$, to z definicji istnieje nierówna stale zero funkcja $G : \Omega_1 \to \mathbb{R}$, taka że $\Delta G = \lambda G$ i spełniony jest dla niej warunek brzegowy Dirichleta. Rozszerzmy tę funkcję na cały wielokąt W_1:

$$\bar{G}(x,y) := \begin{cases} G(x,y) & \text{dla } (x,y) \in \Omega_1,\\ 0 & \text{dla } (x,y) \in W_1 \setminus \Omega_1. \end{cases}$$

Z uwagi na warunek brzegowy taka funkcja oczywiście jest ciągła. Niech $\tau_{PQR} : \triangle ABC \to \triangle PQR$ oznacza teraz izometrię przekształcającą trójkąt ABC na trójkąt PQR. Określimy funkcje $G_i : \triangle ABC \to \mathbb{R}$, $i = 0, 1, \ldots, 6$ następująco: $G_0 = \bar{G}\big|_{ABC}$ oraz

$$\begin{aligned}
&G_1 = \bar{G}\big|_{A'BC} \circ \tau_{A'BC}, \quad G_2 = \bar{G}\big|_{AB'C} \circ \tau_{AB'C}, \quad G_3 = \bar{G}\big|_{ABC'} \circ \tau_{ABC'},\\
&G_4 = \bar{G}\big|_{A'B_1'C} \circ \tau_{A'B_1'C}, \quad G_5 = \bar{G}\big|_{AB'C_1'} \circ \tau_{AB'C_1'} \quad G_6 = \bar{G}\big|_{A_1'BC'} \circ \tau_{A_1'BC'}
\end{aligned}$$

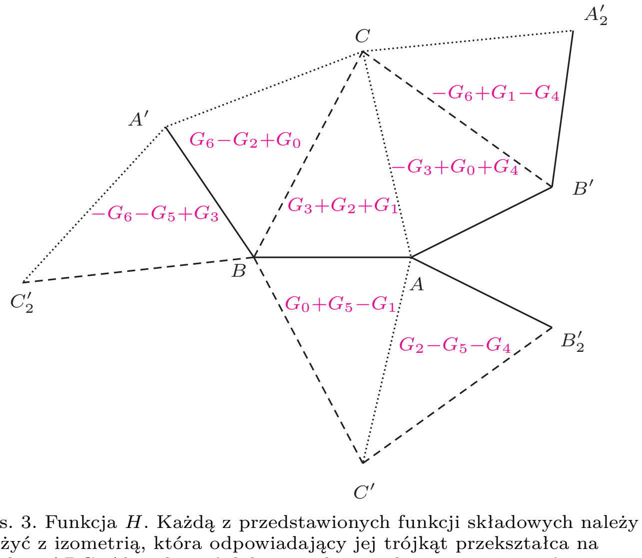
(rysunek 2). Ponownie powołamy się na niezmienniczość laplasjanu na izometrie, żeby stwierdzić, że dla każdego $i = 0, 1, \ldots, 6$ na wnętrzu trójkąta ABC zachodzi

$$\Delta G_i = \lambda G_i.$$

Określimy teraz również funkcję $H : W_2 \to \mathbb{R}$, która na poszczególnych kawałkach wielokąta W_2 będzie przyjmowała takie wartości, jak widać na rysunku 3. Uważny Czytelnik bardzo szybko zada pytanie: „W porządku, ale dlaczego ta funkcja jest dobrze określona na krawędziach trójkątów?”. Spieszymy z odpowiedzią: przyjrzyjmy się najpierw czworokątowi $ACBC'$. Określimy trzy funkcje $H_1, H_2, H_3 : \triangle_{ABC} \cup \triangle_{ABC'} \to \mathbb{R}$ następującymi wzorami:

$$H_1 = \begin{cases} G_3(x) & \text{dla } x \in \triangle_{ABC},\\ G_0(\tau^{-1}_{ABC'}(x)) & \text{dla } x \ \in \triangle_{ABC'}, \end{cases} \quad H_2 = \begin{cases} G_2(x) & \text{dla } x \in \triangle_{ABC},\\ G_5(\tau^{-1}_{ABC'}(x)) & \text{dla } x \ \in \triangle_{ABC'}, \end{cases}$$

$$H_3 = \begin{cases} G_1(x) & \text{dla } x \in \triangle_{ABC},\\ -G_1(\tau^{-1}_{ABC'}(x)) & \text{dla } x \ \in \triangle_{ABC'}. \end{cases}$$



Rys. 3. Funkcja H. Każdą z przedstawionych funkcji składowych należy złożyć z izometrią, która odpowiadający jej trójkąt przekształca na trójkąt ABC. Aby ułatwić dalszą analizę, wykorzystującą porównanie z rysunkiem 2, przystające odcinki oznaczono w ten sam sposób

W ten sposób $H\big|_{ACBC'} = H_1 + H_2 + H_3$. Ponadto $H_1 = G\big|_{ACBC'} \circ \tau^{-1}_{ABC'}$ oraz $H_2 = G\big|_{ACB'C_1'} \circ \tau^{-1}_{AB'C}$. Znowu korzystając z niezmienniczości laplasjanu ze względu na izometrie, możemy stwierdzić, że we wnętrzu czworokąta $ACBC'$ spełnione jest równanie $\Delta H_i = \lambda H_i$ dla $i = 1, 2$ (gdyż funkcja G spełnia je na całym wielokącie W_1). Pozostaje przyjrzeć się funkcji H_3. Z warunku zerowania się funkcji G na brzegu W_1 (w szczególności na odcinku BA') wynika, że $G_1\big|_{AB} = 0$, zatem funkcja H_1 jest dobrze „sklejona” na odcinku AB. Spełnia ona oczywiście warunek $\Delta H_1 = \lambda H_1$ we wnętrzach trójkątów ABC i ABC'. To, że równość ta jest spełniona również na odcinku AB, jest pewną szczególną własnością równania $\Delta G = \lambda G$, zwaną „własnością odbicia”; w pełnym brzmieniu przytaczamy ją na marginesie na następnej stronie, jednak dowód pominiemy. Liniowość laplasjanu gwarantuje nam teraz,

Własność odbicia laplasjanu. Niech D będzie otwartym podzbiorem $\mathbb{R}^2$, symetrycznym względem prostej $y = 0$ i niech $D^+ = \{(x, y)\colon y > 0\}$. Załóżmy, że funkcja G klasy C^2 jest określona na D^+ i spełnia $\Delta G = \lambda G$ dla pewnego $\lambda \in \mathbb{R}$ oraz dla każdego punktu $(x_0, 0) \in D$ mamy $\lim_{(x,y)\to(x_0,0)} G(x, y) = 0$. Wtedy funkcja $\hat{G}(x, y) = \operatorname{sgn}(y)G(x, |y|)$, określona na całym D, jest klasy C^2 oraz spełnia $\Delta\hat{G} = \lambda\hat{G}$.

że funkcja H określona kawałkami na trójkątach ABC oraz ABC', spełnia warunek $\Delta H = \lambda H$ na całym tym obszarze.

W ten sam sposób, wyróżniając w W_1 inne czworokąty, wnioskujemy, że funkcja H jest dobrze określona na wszystkich krawędziach trójkątów, a także że spełnia równanie $\Delta H = \lambda H$ na całym Ω_2. Dociekliwy Czytelnik zechce samodzielnie sprawdzić nietrudnym rachunkiem, że dla funkcji H jest również spełniony warunek brzegowy Dirichleta na Ω_2. Dowód, że H nie jest tożsamościowo równa 0, pominiemy, gdyż jest on dość techniczny.

Pracowicie wykazaliśmy, że jeżeli λ należy do $\Lambda(\Omega_1)$, to należy również do $\Lambda(\Omega_2)$, czyli $\Lambda(\Omega_1) \subset \Lambda(\Omega_2)$. Analogicznie uzasadniamy $\Lambda(\Omega_2) \subset \Lambda(\Omega_1)$, a zatem $\Lambda(\Omega_1) = \Lambda(\Omega_2)$. Rozpatrywane wielokąty mają więc takie samo widmo drgań; nie są jednak izometryczne. Daje to negatywną odpowiedź na tytułowe pytanie. Ciekawe, co sądzą na ten temat perkusiści. . . ?

Co ma wspólnego cykl $(6, 5, 4)$ z językiem polskim?

Każdej liczbie rzeczywistej możemy przypisać nieskończony ciąg cyfr jej rozwinięcia dziesiętnego. Jak wiadomo, jeżeli ciąg od pewnego miejsca się *zapętla*, to mamy do czynienia z liczbą wymierną. Inaczej rzecz ujmując, liczby wymierne mają *okresowe* rozwinięcie dziesiętne. Przyjmujemy tutaj, że tzw. rozwinięcie skończone jest rozwinięciem okresowym – od pewnego miejsca na każdej pozycji występuje wyłącznie cyfra 0.

My będziemy rozważać ciągi liczbowe. Możemy przyjąć jakąś konkretną metodę produkcji kolejnych wyrazów ciągu, na przykład

$$c_{n+1} = \begin{cases} \frac{1}{2}c_n, & \text{gdy } c_n \text{ jest parzysta,} \\ 3c_n + 1, & \text{gdy } c_n \text{ jest nieparzysta.} \end{cases}$$

Jednak stwierdzenie, czy dla dowolnej początkowej liczby c_0 ten ciąg **zawsze** się zapętli, jest nie lada wyzwaniem. Tego dotyczy *problem Collatza* – ale to nie on jest bohaterem tego tekstu.

Wspomniany raport Hakmem można znaleźć na stronie `dspace.mit.edu/handle/1721.1/6086`

W 1972 roku zespół z Artificial Intelligence Laboratory, Massachusetts Institute of Technology, opracował raport Hakmem – złożony z prawie dwustu algorytmicznych ciekawostek (miszmasz algebry, kombinatoryki, teorii liczb, teorii grup. . .). Pozycja 134. wspomnianego raportu także dotyczy ciągów liczbowych i ich zapętlania. Przyjmijmy następującą zasadę:

każdy element ciągu (oprócz pierwszego) określa, ile liter jest potrzebnych do zapisania słownie (w języku angielskim) poprzedniego elementu ciągu.

Zacznijmy na przykład od liczby 14. Słowo *fourteen* ma osiem liter, więc drugi element ciągu to 8. Słowo *eight* ma pięć liter, kolejny element ciągu to 5. Słowo *five* ma cztery litery – podobnie jak *four*. Zatem

$$14\,(\mathit{fourteen}) \to 8\,(\mathit{eight}) \to 5\,(\mathit{five}) \to 4\,(\mathit{four}) \to 4\,(\mathit{four}) \to \ldots$$

i tym sposobem otrzymujemy ciąg $(14, 8, 5, 4, 4, \ldots)$. Co ciekawe, niezależnie od tego, od jakiej liczby zaczniemy, dany ciąg zawsze (i szybko) zapętli się na liczbie 4.

Czy już się domyślasz, Czytelniku, jak brzmi odpowiedź na tytułowe pytanie?

*Bartłomiej PAWLIK**

* Wydział Matematyki Stosowanej, Politechnika Śląska