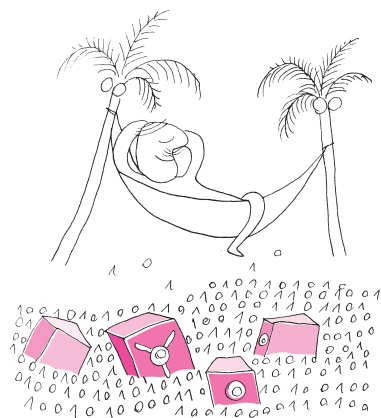


# Leibniz i Calculus

Jarosław GÓRNICKI\*

\* Wydział Matematyki i Fizyki  
Stosowanej, Politechnika Rzeszowska



W marcu 1672 roku do Paryża przybył z misją dyplomatyczną od elektora mogunckiego młody prawnik, filozof i erudyta Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716). Spotkanie z Christiaanem Huygensem (jesienią 1672 r.) przekonało Leibniza, że w matematyce jest nowicjuszem. Huygens, chcąc zbadać matematyczną przenikliwość Leibniza, rzucił mu takie oto wyzwanie: wyznaczyć sumę szeregu  $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \frac{1}{15} + \dots$ . Leibniz zadanie wykonał (a Ty? rozwiązanie na końcu artykułu). Sukces rozpałił jego zainteresowanie matematyką. Szczęśliwym trafem od stycznia do marca 1673 roku Leibniz przebywał w Londynie (drugi raz był tam w 1676 r.). Podczas tego pobytu nauczył się wiele o szeregach nieskończonych, studiował *Lectiones geometricae* Isaaca Barrowa z 1670 r., a za pośrednictwem Johna Collinsa zapoznał się z manuskryptem *De analysi per equationes numero terminorum infinites* Isaaca Newtona z 1669 r. Rozmawiał z Robertem Hooke’iem, Robertem Boylem, Johnem Pellem, a w *Royal Society* zademonstrował swoją maszynę rachunkową (lepszą od stworzonej przez Blaise Pascala). Po powrocie do Paryża, za namową Huygensa, Leibniz studiował prace Bonaventury Cavalieriego, Jamesa Gregory’ego, René Descartesa i Blaise Pascala. Tak wspominał odkrywanie swoich matematycznych możliwości: „byłem gotów radzić sobie bez jakiegokolwiek pomocy, ponieważ dzieła matematyczne czytałem prawie tak, jak inni czytają romanse”. W Paryżu zainteresował się problemem zmienności: jak szybko zmienia się określona wielkość, i odwrotnie, jak na podstawie tempa zmiany pewnej wielkości określić jej wartość. Jesienią 1675 roku Leibniz znalazł już „nową metodę” – to co dzisiaj nazywamy rachunkiem różniczkowym i całkowym. Dostrzegł, że wyznaczenie stycznej do krzywej zależy od stosunku różnic rzędnych i odciętych, gdy te stają się nieskończenie małe.

Niech  $f$  będzie funkcją rzeczywistą, patrz rysunek 1. Każdej wartości  $x$ , w której funkcja  $f$  ma styczną, odpowiada wartość  $\text{tg } \varphi$ , gdzie  $\varphi$  jest kątem nachylenia tej stycznej do kierunku osi  $OX$ . Tak określoną nową funkcję nazywamy *pochodną* funkcji  $f$ . Oznaczmy ją symbolem  $\frac{df}{dx}$  lub  $df$ . Działanie polegające na obliczeniu pochodnej nazywamy *różniczkowaniem*. Załóżmy, że krzywa  $f$  posiada w ustalonym punkcie  $P(x, f(x))$  styczną (rys. 1). Niech punkt  $Q(x+h, f(x+h))$  będzie punktem zmiennym. Wówczas

$$\frac{QR}{PR} = \frac{NQ - MP}{MN} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \rightarrow \text{tg } \varphi, \text{ gdy } h \rightarrow 0.$$

Dla przykładu, ponieważ

$$(x+h)^n - x^n = x^n + nx^{n-1}h + \dots + h^n - x^n = nx^{n-1}h + \dots,$$

gdzie dalsze wyrazy zawierają wyższe potęgi przyrostu  $h$ , więc

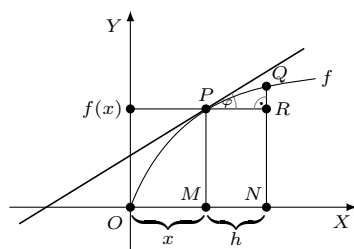
$$\frac{(x+h)^n - x^n}{h} \rightarrow nx^{n-1}, \text{ gdy } h \rightarrow 0.$$

Pochodną funkcji  $x^n$  jest więc funkcja  $dx^n = nx^{n-1}$ , która przedstawia chwilowe tempo zmian wielkości  $x^n$ . Do obliczania pochodnych bardziej skomplikowanych funkcji Leibniz zaproponował postępowanie algorytmiczne oparte na wykorzystaniu wzorów ( $f$  i  $g$  to funkcje rzeczywiste,  $A$  to liczba rzeczywista):

$$d(A \cdot f) = A \cdot df, \quad d(f \pm g) = df \pm dg, \quad d(f \cdot g) = df \cdot g + f \cdot dg,$$

$$d\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{df \cdot g - f \cdot dg}{g \cdot g}, \quad d(f(g)) = (df) \cdot (dg).$$

Operacją w pewnym sensie odwrotną do różniczkowania jest znajdowanie dla danej funkcji  $f$  takiej funkcji  $\Phi$ , aby  $d\Phi = f$ . Na przykład dla funkcji  $f(x) = x^n$  możemy odgadnąć, że  $\Phi(x) = \frac{1}{n+1}x^{n+1}$ , bo  $d(\frac{1}{n+1}x^{n+1}) = x^n$ . Procedurę znajdowania takich funkcji  $\Phi$  nazywamy *całkowaniem* i zapisujemy  $\int x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + c$  ( $c$  jest dowolną stałą).



Rys. 1



Obecnie wykazanie tożsamości Leibniza jest standardową umiejętnością,

$$\begin{aligned} \arctg x &= \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt = \\ &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + \\ &+ (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + (-1)^{n+1} \int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2} dt. \end{aligned}$$

Ostatnia całka dąży do zera, gdy  $|x| \leq 1$ , gdyż

$$\left| \int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2} dt \right| \leq \left| \int_0^x t^{2n+2} dt \right| = \frac{1}{2n+3} |x|^{2n+3} \rightarrow 0,$$

gdy  $n \rightarrow \infty$ . Zatem dla  $|x| \leq 1$  funkcja  $\arctg x$  ma rozwinięcie w postaci szeregu  $\arctg x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots$  i dla  $x = 1$ , mamy  $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots$

W tych czasach szyfrowanie wiadomości nie było niczym niezwykłym. Jeszcze Carl Gauss w swoim *Dzienniku* pod datą 10 lipca 1796 roku napisał

$$\text{EYPHKA. num} = \triangle + \triangle + \triangle.$$

Mając wtedy 19 lat, odkrył dowód wyjątkowego rezultatu: *każda dodatnia liczba całkowita jest sumą trzech liczb trójkątnych*  $\{0, 1, 3, 6, 10, \dots, \frac{n(n+1)}{2}, \dots\}$ .

Anagram Newtona „*6acc...12vx*” oznacza *Data aequatione quocunque fluentes quantitates involvente fluxiones invenire et vice versa* (list był pisany po łacinie), czyli „według danego równania, zawierającego ilekolwiek fluent, znaleźć fluksje i na odwrót”.

W pracy *Nova methodus...*, pierwszej publikacji z rachunku różniczkowego, jest warunek  $dv = 0$  dla maksimum lub minimum  $d dv = 0$  dla punktu przegięcia.

Leibnizowi zawdzięczamy (obok  $d$ -notacji:  $\frac{df}{dx}$ ,  $\int f(x)dx$ ) również nazwy *calculus differentialis* i *calculus integralis*, użycie symbolu „=” na równość, kropki dla mnożenia, terminy *funkcja* oraz *współrzędne*.

Rozwiązanie zadania z początku artykułu: dla dowolnej liczby naturalnej  $n$  zachodzi

$$\begin{aligned} 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \frac{1}{15} + \dots + \frac{2}{n(n+1)} &= \\ &= 2 \cdot \left[ \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} \right] = \\ &= 2 \cdot \left[ \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \right] = \\ &= 2 - \frac{1}{n+1}, \end{aligned}$$

zatem rozważany szereg jest zbieżny, a jego suma to 2.

więc  $S_2 < S_4 < S_6 < \dots$  i

$$S_{2n} = 1 - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) - \dots - \left(\frac{1}{2n-5} - \frac{1}{2n-3}\right) - \frac{1}{2n-1} < 1,$$

zatem  $S_{2n} \rightarrow s$ , gdy  $n \rightarrow \infty$ . Wtedy również  $S_{2n+1} = S_{2n} + \frac{1}{2n+1} \rightarrow s$ , gdy  $n \rightarrow \infty$ .

Ostatecznie Leibniz otrzymał równość:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots$$

O swoim odkryciu Leibniz powiadomił Huygensa, szczegółowo opisał swoją metodę w liście z 27 sierpnia 1676 roku przesłanym Newtonowi za pośrednictwem H. Oldenburga (sekretarza *Royal Society*). W odpowiedzi, w liście do Oldenburga z 24 października 1676 roku, Newton pisał: „metoda Leibniza otrzymania szeregu zbieżnego [do  $\frac{\pi}{4}$ ] jest z pewnością bardzo elegancka i wystarczająco ujawnia geniusz jej autora, nawet jeśli nie napisze on nic więcej”. Jednak na prośbę Leibniza o ujawnienie swoich metod Newton pisał: „Podstawy tych operacji są w istocie dość oczywiste, ale ponieważ nie mogę kontynuować wyjaśnienia tego teraz, wolałem to ukryć:

*6accdae13eff7i3l9n4o4qrr4s9t12vx.*

Na tym fundamencie próbowałem również uprościć teorie, które dotyczą kwadratury krzywych i doszedłem do pewnych ogólnych twierdzeń”.

Po powrocie z Paryża, w październiku 1676 roku, Leibniz pozostał w służbie księcia Hanoweru. Zajmował się biblioteką, genealogią, prawodawstwem, techniką, dyplomacją, ale przede wszystkim był filozofem. Był inicjatorem utworzenia Akademii Nauk w Berlinie (11 lipca 1700 r.) i jej pierwszym przewodniczącym. W swoich działaniach dążył do pogodzenia wiary i rozumu, religii i nauki, idealizmu z materializmem. Prowadził ożywioną korespondencję z ponad 600 osobami. Zachowało się około 15 tysięcy jego listów, w istocie esejów.

Po *Elementach* Euklidesa rachunek różniczkowy i całkowy pozostaje największym osiągnięciem matematyki. To dzięki niemu wiemy, że świat funkcjonuje zgodnie z pewnymi zasadami matematyki i fizyki, które umożliwiają przewidywanie wyników określonych działań. Newton pierwszy odkrył rachunek różniczkowy i całkowy, w latach 1664–1666, podchodząc do problemu kinematycznie, ale z ogłoszeniem swoich wyników zwlekał. Leibniz, niezależnie od Newtona, odkrył rachunek różniczkowy i całkowy później, w latach 1672–1676, na drodze rozważań algebraiczno-geometrycznych. Leibniz (pomijając korespondencję, gdzie uczynił to jeszcze wcześniej) pierwszy ogłosił pracę o rachunku różniczkowym *Nova methodus pro maximis et minimis...* w „Acta Eruditorum” 3 (1684), 467–472, oraz pierwszą pracę o rachunku całkowym *De geometria recondita et analysi...* w „Acta Eruditorum” 5 (1686), 292–300. Newton zrobił to dopiero w traktacie *De quadratura curvarum* z 1704 r., a praca Newtona *The Method of Fluxions* (1736) ukazała się niemal dziesięć lat po jego śmierci. Dodatkowo metoda Leibniza była bez porównania lepiej opracowana (trafnie dobrana symbolika, nazewnictwo) i do dziś jest używana.

Spór o pierwszeństwo (wywołany przez przesadnie patriotycznych przyjaciół Newtona) na całe stulecia zatruł relacje między matematykami z wysp i z kontynentu. Drogą wytyczoną przez Leibniza poszli uczeni tej miary co Jacob Bernoulli (ur. 1654 r.), Johann Bernoulli (ur. 1667 r.), markiz de L'Hôpital (autor pierwszego podręcznika rachunku różniczkowego i całkowego *Analyse des infiniment petits...* (Paryż, 1696), napisanego na podstawie wykładów Johanna Bernoulliego). Ich następcy na kontynencie, Leonhard Euler, Joseph Lagrange, Pierre de Laplace, wytyczali dalsze kierunki badań.

Wielkim przegrany okazał się Leibniz, odszedł niezauważony i zapomniany. W luteranśkim Neustädter Kirche w Hanowerze znajduje się jego skromne epitafium OSSA LEIBNITII (prochy Leibniza).