

# O nierównościach typu Diananda–Shapiro

E-mail autora: piotr-kumor@wp.pl

Piotr KUMOR

Zacznijmy od przypomnienia zadania 766 z Klubu 44M ( $\Delta_{18}^9$ ):

Znaleźć liczbę rzeczywistą  $M > \frac{5}{2}$  taką, że dla dowolnych liczb dodatnich  $a, b, c, d, e$  zachodzi nierówność

$$\sqrt[5]{\frac{a}{b+c}} + \sqrt[5]{\frac{b}{c+d}} + \sqrt[5]{\frac{c}{d+e}} + \sqrt[5]{\frac{d}{e+a}} + \sqrt[5]{\frac{e}{a+b}} \geq M.$$

Im większa liczba  $M$ , tym lepsze rozwiązanie.

Powyższy problem można w naturalny sposób sformułować w ogólniejszej postaci. Niech  $n \geq 3$  będzie liczbą całkowitą oraz  $\alpha > 0$  liczbą rzeczywistą. Oznaczmy przez  $S(n, \alpha)$  największe ograniczenie dolne wartości sumy  $\sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i}{x_{i+1}+x_{i+2}}\right)^\alpha$ , gdzie  $x_1, \dots, x_n > 0$ . Wówczas zadanie 766 to pytanie o jak najlepsze oszacowanie  $S(5, \frac{1}{5})$  z dołu. Co wiadomo w tej kwestii dla ogólnych wartości  $n$  i  $\alpha$ ?

Dla  $\alpha = 1$  zagadnienie jest znane jako *problem Shapiro*. Ma on długą i barwną historię, która rozpoczęła się od zadania zaproponowanego przez Joela Shapiro w 1954 roku na łamach *The American Mathematical Monthly*, w którym prosił on czytelników magazynu o udowodnienie, że  $S(n, 1) = \frac{n}{2}$ . Okazało się, że zależność ta nie jest prawdziwa; pierwszy kontrprzykład ( $n = 20$ ) pojawił się w 1956 roku (James Lighthill), w 1985 roku B.A. Troesch zaproponował elegancki kontrprzykład dla  $n = 14$  – należy rozważyć ciąg liczb  $(0, 42, 2, 42, 4, 41, 5, 39, 4, 38, 2, 38, 0, 40)$ . Okazuje się, że jest to najmniejszy (co do  $n$ ) możliwy kontrprzykład – hipoteza Shapiro została udowodniona dla parzystych  $n \leq 12$  oraz nieparzystych  $n \leq 23$ . Wiadomo również, jaka jest największa stała  $D$ , dla której  $S(n, 1) \geq Dn$  dla wszystkich  $n \geq 1$ . Jest to tak zwana *stała Drinfelda* i wynosi w przybliżeniu 0,494. Precyzyjniej,  $D = \frac{1}{2}\phi(0)$ , gdzie  $\phi$  jest największą funkcją wypukłą, która ogranicza z dołu funkcje  $e^{-x}$  oraz  $2(e^x + e^{x/2})^{-1}$ . Zatem dla  $\alpha = 1$  znamy kompletną odpowiedź. Szczegóły znajdziemy na przykład w [1] i [2]. Warto przy okazji nadmienić, że Władimir Drinfeld – autor wspomnianej nierówności – był laureatem Medalu Fieldsa w 1990 roku, a niedawno (w 2018 roku) otrzymał Nagrodę Wolfa w dziedzinie matematyki.

Okazuje się, że dla  $\alpha \geq \frac{1+\sqrt{5}}{2}$  zachodzi nierówność  $S(n, \alpha) \geq \frac{n}{2\alpha}$ , zaś równość ma miejsce wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie liczby w ciągu są równe. Dowód można odnaleźć w [5]. Zatem dla  $\alpha \geq \frac{1+\sqrt{5}}{2}$  też wszystko jest jasne.

Pozostają więc do zbadania przypadki:  $1 < \alpha < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$  oraz  $0 < \alpha < 1$ . Dalej interesować nas będzie tylko ta druga sytuacja. Ustalmy liczby rzeczywiste  $x, y, z > 0$  oraz  $0 < \alpha < \beta \leq 1$ . Niech  $\gamma = \frac{\alpha}{\beta}$ , wówczas  $0 < \gamma < 1$ . Mamy  $\left(\frac{x}{y+z}\right)^\alpha = \left(\left(\frac{x}{y+z}\right)^\gamma\right)^\beta > \left(\frac{x^\gamma}{y^\gamma+z^\gamma}\right)^\beta$ , bo jeżeli  $0 < \gamma < 1$ , to  $\left(\frac{x}{y+z}\right)^\gamma > \frac{x^\gamma}{y^\gamma+z^\gamma}$ . Wobec tego dla wszystkich wykładników  $0 < \alpha < \beta \leq 1$  zachodzi nierówność  $S(n, \alpha) \geq S(n, \beta)$ .

Z rozwiązania problemu Shapiro i powyższej uwagi wnioskujemy, że dla parzystych liczb  $n \leq 12$  i wszystkich wykładników  $0 < \alpha < 1$  zachodzi  $S(n, \alpha) \geq \frac{n}{2}$ . Liczby  $\frac{n}{2}$  nie można tu zastąpić liczbą większą, wystarczy bowiem rozważyć  $1, 0, 1, 0, \dots, 1, 0$ . Zatem dla parzystych liczb  $n \leq 12$  i wszystkich wykładników  $0 < \alpha \leq 1$  mamy pełną odpowiedź:  $S(n, \alpha) = \frac{n}{2}$ .

Rozumując podobnie jak w firmowym rozwiązaniu zadania 766 (zobacz  $\Delta_{19}^1$ ), możemy udowodnić nierówność  $S(n, \alpha) \geq \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor \cdot \frac{1}{2\alpha}$  dla wszystkich  $n$  i  $\alpha$ . Z drugiej strony, rozważając ciąg  $1, 0, 1, 0, \dots, 1, 0$  dla  $n$  parzystych lub  $1, 1, 0, 1, \dots, 0$  (dwie jedynki sąsiadują) dla  $n$  nieparzystych, dostajemy  $S(n, \alpha) \leq \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor$ . Ponieważ  $2^\alpha$  zbiega do 1, gdy  $\alpha$  dąży do 0, więc naturalna jest hipoteza, że dla bliskich 0 wartości wykładnika  $\alpha$  zachodzi  $S(n, \alpha) = \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor$ . Jak zauważyliśmy

Łatwo uzasadnić, że  $S(n, 1) \leq \frac{n}{2}$ ; wystarczy rozpatrzyć ciąg samych jedynek.



**Rozwiązanie zadania F 993.** Silniki samochodów sportowych dysponują zwykle nadmiarem mocy i są w stanie wytworzyć moment siły pozwalający zerwać przyczepność opon do podłoża. W takich warunkach, maksymalna możliwa do osiągnięcia prędkość wynika z wartości sił oporu i granicy przyczepności opon. Przy dużych prędkościach niemal cała siła oporu pochodzi od oporu powietrza i jest proporcjonalna do kwadratu prędkości:  $F_{op} = av^2$ . Zerwanie przyczepności opon następuje, gdy zostanie przekroczona graniczna wartość tarcia statycznego:  $T = fQ$ , gdzie  $f$  oznacza współczynnik tarcia statycznego opon o podłożu, a  $Q$  siłę nacisku na koła napędzające. Maksymalna prędkość  $v_{max}$  odpowiada warunkowi  $T = F_{op}$ , a więc:

$$v_{max} = \sqrt{\frac{fQ}{a}}.$$

Jeśli dla naszego oszacowania przyjmiemy uproszczenie, że siła  $Q$  jest proporcjonalna do całkowitej masy pojazdu, to otrzymujemy, że w drugiej próbie kierowca osiągnął

$$v_2 = (1520/1200)^{1/2} 200 \text{ km/godz.} \approx 225 \text{ km/godz.}$$

Rozumowanie podane w rozwiązaniu zadania 766 pochodzi z pracy [4] i było potem wielokrotnie odkrywane ponownie.

wyżej, jest ona spełniona dla parzystych  $n \leq 12$  i wszystkich wykładników  $0 < \alpha \leq 1$ , gdyż dla parzystych  $n$  mamy  $\frac{n}{2} = \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor$ .

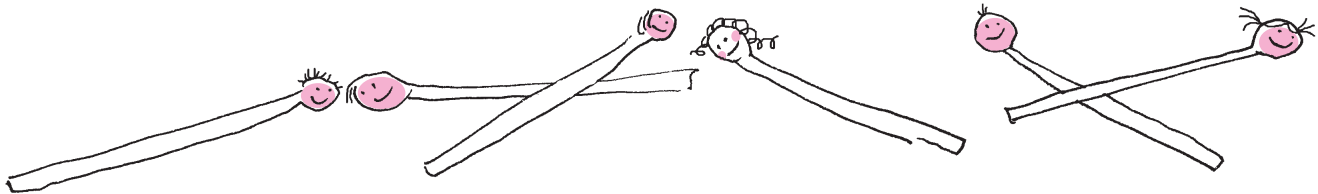
Dla  $n = 3$  oraz  $0 < \alpha < \log_2 \frac{3}{2} \approx 0,58496$  i dla dowolnych dodatnich liczb  $a, b, c$  prawdziwa jest nierówność  $(\frac{a}{b+c})^\alpha + (\frac{b}{c+a})^\alpha + (\frac{c}{a+b})^\alpha > 2$ . Jest to udowodnione w [3]. Zatem  $S(3, \alpha) = 2$  dla  $0 < \alpha \leq \log_2 \frac{3}{2}$ . Oczywiście dla  $\alpha > \log_2 \frac{3}{2}$  jest  $S(3, \alpha) < 2$ , co widać na przykładzie liczb  $a = b = c = 1$ . Dla  $n = 3$  oraz dla parzystych liczb  $n \leq 12$  wszystko jest więc jasne.

Na podstawie udowodnionej wyżej nierówności  $S(n, \alpha) \geq S(n, 1)$  dla  $0 < \alpha < 1$  oraz tego, co wiadomo z rozwiązania problemu Shapiro, otrzymujemy, że  $S(n, \alpha) \geq \frac{n}{2}$  dla liczb nieparzystych  $n \leq 23$  oraz  $S(n, \alpha) \geq Dn$  dla pozostałych wartości  $n$ .

Kierując się wyłącznie intuicją, postawiłem hipotezę, że  $S(n, \alpha) = \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor$  dla wszystkich  $n$  oraz  $0 < \alpha \leq \frac{1}{2}$ . Nie potrafię tego dowieść dla żadnej liczby  $n$  poza wskazanymi powyżej (czyli dla  $n = 3$  oraz parzystych  $n \leq 12$ ). O sytuacji dla pozostałych wartości  $n$  mogę powiedzieć bardzo niewiele. Jedynie dla  $n = 5$  (najmniejsza niezbadana wartość  $n$ ) udało mi się pokazać, że  $S(5, \alpha) = 3$  dla  $0 < \alpha \leq \frac{1}{5}$ , co stanowi pełne rozwiązanie zadania 766. Dowód udostępniony jest na stronie *Delty*. Będę bardzo wdzięczny za wszelkie uwagi lub związane wyniki. Na przykład dowody nierówności postaci  $S(n, \alpha) > M > \frac{n}{2}$  dla nieparzystych  $n$  i możliwie dużych  $\alpha$  (najlepiej  $\alpha > \frac{1}{2}$ ) lub ewentualne kontrprzykłady do uczynionych wyżej hipotez. Zapraszam do kontaktu poprzez zamieszczony na początku artykułu adres poczty elektronicznej, a także do dyskusji w komentarzach do tego artykułu na stronie *Delty*. Według mojej wiedzy w literaturze ani w sieci nie ma aktualnie żadnych innych tego rodzaju wyników. Uzyskanie takowych może więc być cenne, w szczególności dla osób zainteresowanych Konkursem Prac Uczniowskich z Matematyki im. Pawła Domańskiego.

**Literatura:**

- [1] Kourliandtchik, L. (2002). *Słynne nierówności*, Wydawnictwo Aksjomat.
- [2] „Shapiro inequality” Wikipedia, The Free Encyclopedia, dostęp 7 sierpnia 2019 r.
- [3] Hung, P. K. (2008). *Secrets in Inequalities* vol. 2 – „Advanced Inequalities”, Gil Publishing House, darmowy rozdział dostępny na stronie wydawcy.
- [4] Diananda, P. H. (1973). *Some cyclic and other inequalities. III*, Proc. Cambridge Philos. Soc., vol. 73, part 1, 69–71.
- [5] Diananda, P. H. (1974). *Some cyclic and other inequalities. IV*, Proc. Cambridge Philos. Soc., vol. 76, part 1, 183–186.



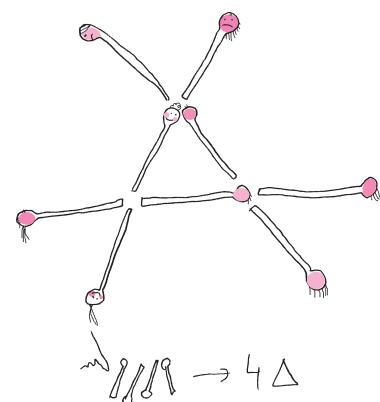
## Spadek swobodny z księżycowej orbity

*Andrzej SOŁTAN\**

Siła grawitacji sprawia, że jakikolwiek upuszczony przedmiot spada ruchem jednostajnie przyspieszonym. Wartość przyspieszenia ziemskiego znamy na pamięć. Można więc obliczyć położenie ciała i jego prędkość w dowolnej chwili. Również czas spadania wyznaczymy natychmiast, jeżeli tylko znamy wysokość początkową. Trudno o mniej wymagające zadanie z dynamiki.

Rachunki się komplikują, gdy ciało spada z dużej wysokości. Tak dużej, że nie możemy już przyjąć, iż przyspieszenie ziemskie jest stałe. Na przykład z wysokości orbity Księżyca. Ponieważ przyspieszenie grawitacyjne maleje z kwadratem odległości, 384 750 km od Ziemi (średnia odległość Księżyca od środka Ziemi) natężenie pola grawitacyjnego Ziemi jest około 3600 razy słabsze niż w pobliżu jej powierzchni. Wiedział to już Izaak Newton, co znacząco pomogło mu sformułować prawo powszechnej grawitacji.

Jak długo zatem będzie trwał spadek swobodny w centralnym polu grawitacyjnym Ziemi z wysokości orbity Księżyca? Promień orbity Księżyca jest 60 razy większy od promienia Ziemi. Wobec takiej różnicy wielkości, dla uproszczenia, pominiemy w rachunkach rozmiar Ziemi. Dokładnie tak brzmiało



\* CAMK PAN, Przewodniczący Komitetu Głównego Olimpiady Astronomicznej