wszystkie pozostałe były większe od M. Rozbieżny do nieskończoności jest oczywiście ciąg $a_n = n$, a także ciąg o wyrazach $a_n = n + (-1)^n$.

Pojęcie zbieżności pozwala zdefiniować sumę nieskończenie wielu liczb, czyli **szereg**. Dodawanie jest działaniem dwuargumentowym, w jednym kroku umiemy dodać tylko dwie liczby, więc aby dodać nieskończenie wiele liczb, trzeba by wykonać nieskończenie wiele kroków, a tego zrobić nie umiemy. I tu z pomocą przychodzi nam granica ciągu. Sumę nieskończenie wielu wyrazów $a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$, zapisywaną skrótowo jako $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, definiujemy jako granicę sumy ciągu $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$, zwanego **ciągiem sum częściowych**. Możemy zatem wyznaczyć sumę wyrazów ciągu geometrycznego o wyrazach q^n, $n = 0, 1, 2, \ldots$, dla $q \neq 1$ suma częściowa ma postać $S_n = 1 + q + q^2 + \ldots + q^n = \frac{1-q^n}{1-q}$ (wzór ten łatwo udowodnić, mnożąc obie strony równości przez $(1-q)$). Dla $|q| < 1$ granica ciągu S_n jest równa $\frac{1}{1-q}$, dla $q > 1$ jest nieskończona, a dla $q \leqslant -1$ nie umiemy określić szukanej sumy (bo ciąg S_n nie ma granicy). Warto dodać na koniec, że sumując wyrazy ciągu zbieżnego do zera, możemy uzyskać sumę nieskończoną – sztandarowym przykładem jest **szereg harmoniczny**, czyli suma $1 + 1/2 + 1/3 + \ldots 1/n + \ldots$

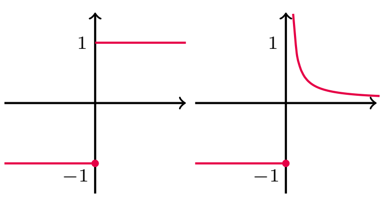
Rozbieżność do nieskończoności sumy $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$ nie jest oczywista, ale dowód tego faktu nie jest szczególnie trudny. (Można go znaleźć w Δ_{16}^{7}).

Marta SZUMAŃSKA

Ciągłość

Ciągłość funkcji – na początku odwołamy się do intuicyjnego rozumienia tego pojęcia, by następnie je uściślić. Jeśli funkcja rzeczywista określona na przedziale jest ciągła, to jej wykres jest „w jednym kawałku” (można go narysować bez odrywania ołówka od kartki). Funkcje

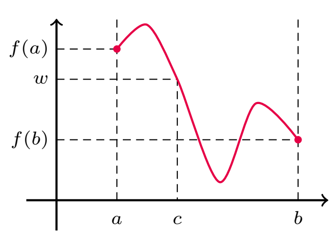
$$f_1(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x > 0 \\ -1 & \text{dla } x \leqslant 0 \end{cases} \quad \text{oraz} \quad f_2(x) = \begin{cases} 1/x & \text{dla } x > 0 \\ -1 & \text{dla } x \leqslant 0 \end{cases}$$



Rys. 2. Wykresy funkcji f_1 i f_2

nie są ciągłe – w obu przypadkach $x_0 = 0$ jest argumentem, w którym wykres funkcji „rozrywa się”; jest to tzw. punkt nieciągłości funkcji. Funkcja ciągła nie może mieć punktów nieciągłości, czyli w każdym punkcie swojej dziedziny musi być ciągła. Pozostaje ściśle określić, co to wszystko znaczy. Ciągłość funkcji w punkcie można wyrazić w języku zbieżności ciągów: *funkcja $f : D_f \to \mathbb{R}$ jest ciągła w $x_0 \in D_f$, jeśli dla każdego ciągu o wyrazach $x_n \in D_f$ zbieżnego do x_0 ciąg $f(x_n)$ jest zbieżny do $f(x_0)$*. Łatwo teraz sprawdzić formalnie, przyjmując $x_n = 1/n$, że funkcje f_1 i f_2 nie są ciągłe w zerze – ciągi o wyrazach $f_1(1/n) = 1$ (ciąg stały) oraz $f_2(1/n) = n$ nie są zbieżne do $f_1(0) = f_2(0) = -1$.

Gdy już wiemy, czym są funkcje ciągłe, zauważmy, że jest ich mnóstwo w otaczającym nas świecie – przyjrzyjmy się tylko funkcjom zależnym od czasu: temperatura w nagrzewającym się piekarniku zmienia się w sposób ciągły, ciśnienie w punkcie pomiarowym również, prędkość samochodu, nawet takiego z super mocnym silnikiem i hamulcami, nie może zmieniać się skokowo.



Rys. 3. Ilustracja własności Darboux

Warto podkreślić, że o ciągłości funkcji można mówić tylko w punktach jej dziedziny. Gdybyśmy przyjęli, że dziedziną funkcji f_1 i f_2 jest $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, to byłyby one ciągłe w każdym punkcie swojej dziedziny, a więc byłyby funkcjami ciągłymi (mimo, że ich wykresy składają się z dwóch „kawałków”). Podobnie funkcja tangens jest ciągła, mimo iż jej wykres ma nieskończenie wiele składowych.

Istnieją funkcje, które nie są ciągłe w żadnym punkcie swojej dziedziny; sztandarowym przykładem jest funkcja Dirichleta, która przyjmuje wartość 0 dla wszystkich argumentów wymiernych i 1 dla wszystkich niewymiernych.

Funkcje ciągłe są bohaterami wielu ważnych twierdzeń matematycznych. Jedno z nich orzeka, że funkcja ciągła określona na przedziale posiada **własność Darboux**, czyli przyjmuje wszystkie wartości pośrednie: dla dowolnych a, b w tym przedziale oraz w leżącego między $f(a)$ i $f(b)$ istnieje $c \in [a, b]$, dla którego $f(c) = w$ (rys. 3). Funkcje o własności Darboux nie muszą być jednak ciągłe. Istnieją takie ekstremalne przykłady funkcji, dla których obraz dowolnego przedziału jest całą prostą rzeczywistą! Taka funkcja oczywiście spełnia własność Darboux i oczywiście nie może być ciągła (dlaczego?). Czytelniku, czy potrafisz skonstruować takiego potwora?

Własność Darboux pozwala na przykład stwierdzać istnienie rozwiązań rozmaitych skomplikowanych równań, bez rozwiązywania ich. Na przykład, żeby udowodnić, że istnieje (choćby jeden) x, dla którego spełniona jest równość $-x^2 + \sin(\pi x)\cos^2(\pi x) = \log_2(1+x) - 1$, wystarczy zauważyć, że ciągła funkcja

$$f(x) = \\ = -x^2 + \sin(\pi x)\cos^2(\pi x) - \log_2(1+x) + 1,$$

przyjmuje wartości $f(0) = 1$ i $f(1) = -\log_2 2 < 0$, zatem dla pewnego $x \in (0, 1)$ funkcja przyjmuje wartość zero i ten właśnie x jest rozwiązaniem naszego równania.

Marta SZUMAŃSKA