 Co to jest? Co to jest? Co to jest?

Relacje

Mając dane dwa zbiory A i B, **relacją** zdefiniowaną pomiędzy tymi dwoma zbiorami matematycy nazywają po prostu podzbiór zbioru wszystkich par elementów, w których pierwszy jest ze zbioru A, a drugi ze zbioru B. Inaczej mówiąc, element ze zbioru A i element ze zbioru B mogą być w danej relacji lub w niej nie być. Relacje często występują na świecie, np. *posiadanie psa* jest relacją pomiędzy zbiorem wszystkich ludzi a zbiorem wszystkich psów. Człowiek o imieniu Dionizy jest w tej relacji z psem Dingiem wtedy i tylko wtedy, gdy Dingo jest jego pupilem.

Szczególnie interesujące wydają się relacje zdefiniowane na jednym zbiorze, czyli gdy $A = B$. Na przykład relacja $\leqslant$ zdefiniowana na liczbach rzeczywistych. Liczba a jest w relacji $\leqslant$ z liczbą b, jeśli a nie jest większe od b. Innym przykładem jest relacja *koloru* zdefiniowana na zbiorze wszystkich samochodów, gdzie dwa samochody są w tej relacji, jeśli są tego samego koloru. Jeszcze inny przykład to relacja *małżeństwo* zdefiniowana na zbiorze wszystkich ludzi.

Rozwiązanie zadania F 974.
Pomiary Dulonga i Petita były wykonywane w temperaturach bliskich temperatury pokojowej – badali oni pierwiastki, które w tej temperaturze występują w stanie stałym, to znaczy, że ich atomy tworzą regularną sieć krystaliczną. W temperaturze pokojowej główny wkład do ciepła właściwego pochodzi od drgań sieci krystalicznej. W temperaturze T energia drgań każdego z atomów wynosi $6kT/2 = 3kT$, to znaczy: po $kT/2$ na każdy ze stopni swobody (zmiana energii potencjalnej i kinetycznej drgań w każdym z trzech kierunków przestrzennych; $k \approx 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ J/K jest stałą Boltzmanna). Takie samo rozumowanie prowadzi do wniosku, że dla związku chemicznego w stanie stałym każdy z atomów też da wkład $3kT$ do energii wewnętrznej kryształu. Wniosek: w stanie stałym ciepło molowe związku o m atomach w cząsteczce wynosi w przybliżeniu $3mR$ (prawo Koppa–Neumanna). Dla FeO, $c_p \approx 6R$.

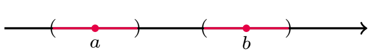
Można badać cechy poszczególnych relacji. Powiemy, że dana relacja jest **zwrotna**, jeśli każdy element jest w relacji z samym sobą. Z wyżej wymienionych przykładów relacja $\leqslant$ oraz relacja koloru mają tę cechę (ale małżeństwo już nie). Relacja jest **symetryczna**, jeśli z tego, że element a jest w relacji z elementem b, wynika, że element b jest w relacji z elementem a. Widzimy, że relacja koloru oraz małżeństwo są przykładami takich relacji, zaś relacja $\leqslant$ nie jest. I w końcu, relacja jest **przechodnia**, jeśli z tego, że a jest w relacji z b i b jest w relacji z c, wynika, że a jest w relacji z c. Jasne jest, że $\leqslant$ oraz relacja tego samego koloru są przykładami tego typu relacji.

Relacja, która jest równocześnie zwrotna, symetryczna i przechodnia, nazywana jest **relacją równoważności**. Taka właśnie jest relacja koloru. Takie relacje mają wyjątkową cechę: generują podział danego zbioru na rozłączne podzbiory, których każde dwa elementy są w relacji. W wypadku relacji koloru jest to podział wszystkich samochodów na zbiory samochodów w poszczególnych kolorach: żółte, czerwone, niebieskie itd. Tak utworzone podzbiory matematycy nazywają **klasami abstrakcji**. Zauważmy również, że każdy podział rozważanego zbioru generuje na nim relację równoważności, w której dwa elementy są w relacji, o ile znajdują się w tej samej części podziału. Tę równoważność pomiędzy relacjami równoważności i podziałami matematycy nazywają **zasadą abstrakcji**.

Michał KORCH

Zbieżność

Zbieżność to jedno z najważniejszych pojęć analizy matematycznej, odnoszące się najczęściej do ciągów i funkcji (oraz rozmaitych obiektów matematycznych skonstruowanych przy ich użyciu, np. szeregów czy ciągów funkcyjnych). Tu zajmiemy się zbieżnością ciągów liczbowych. Mówimy, że ciąg liczbowy $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest zbieżny, jeśli istnieje taka liczba a, że dowolnie blisko niej znajdują się *prawie wszystkie* (czyli wszystkie poza skończoną liczbą) wyrazy ciągu. Innymi słowy, jeśli dla każdego $\varepsilon > 0$ możemy odrzucić skończoną liczbę początkowych wyrazów ciągu, tak by wszystkie pozostałe należały do przedziału $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$, to mówimy, że **ciąg jest zbieżny do** a, i oznaczamy $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. Z tej definicji w łatwy sposób wynika na przykład, że ciąg może mieć co najwyżej jedną granicę (rys. 1).



Rys. 1. Gdyby a, b były granicami pewnego ciągu, to w każdym z kolorowych przedziałów musiałyby znaleźć się prawie wszystkie wyrazy tego ciągu, a to jest sprzeczność.

Przykładem ciągu zbieżnego jest ciąg $(1/n)_{n\in\mathbb{N}}$, który jest zbieżny do zera. Ciągi, które nie są zbieżne, nazywamy **rozbieżnymi**. Rozbieżny jest np. ciąg o wyrazach $a_n = (-1)^n$; istotnie, nie może on spełniać definicji zbieżności – żaden przedział długości 1 (co odpowiada $\varepsilon = \frac{1}{2}$) nie zawiera prawie wszystkich wyrazów tego ciągu.

Warto wspomnieć o szczególnym przypadku ciągów, które nie są zbieżne – o ciągach rozbieżnych do nieskończoności (nazywanych również ciągami zbieżnymi do granicy niewłaściwej). Są to ciągi spełniające następujący warunek: dla dowolnej liczby M można odrzucić skończenie wiele wyrazów ciągu, tak by wszystkie pozostałe były większe od M. Rozbieżny do nieskończoności jest oczywiście ciąg $a_n = n$, a także ciąg o wyrazach $a_n = n + (-1)^n$.

Pojęcie zbieżności pozwala zdefiniować sumę nieskończenie wielu liczb, czyli **szereg**. Dodawanie jest działaniem dwuargumentowym, w jednym kroku umiemy dodać tylko dwie liczby, więc aby dodać nieskończenie wiele liczb, trzeba by wykonać nieskończenie wiele kroków, a tego zrobić nie umiemy. I tu z pomocą przychodzi nam granica ciągu. Sumę nieskończenie wielu wyrazów $a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$, zapisywaną skrótowo jako $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, definiujemy jako granicę sumy ciągu $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$, zwanego **ciągiem sum częściowych**. Możemy zatem wyznaczyć sumę wyrazów ciągu geometrycznego o wyrazach q^n, $n = 0, 1, 2, \ldots$, dla $q \neq 1$ suma częściowa ma postać $S_n = 1 + q + q^2 + \ldots + q^n = \frac{1-q^n}{1-q}$ (wzór ten łatwo udowodnić, mnożąc obie strony równości przez $(1-q)$). Dla $|q| < 1$ granica ciągu S_n jest równa $\frac{1}{1-q}$, dla $q > 1$ jest nieskończona, a dla $q \leqslant -1$ nie umiemy określić szukanej sumy (bo ciąg S_n nie ma granicy). Warto dodać na koniec, że sumując wyrazy ciągu zbieżnego do zera, możemy uzyskać sumę nieskończoną – sztandarowym przykładem jest **szereg harmoniczny**, czyli suma $1 + 1/2 + 1/3 + \ldots 1/n + \ldots$

Rozbieżność do nieskończoności sumy $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$ nie jest oczywista, ale dowód tego faktu nie jest szczególnie trudny. (Można go znaleźć w Δ_{16}^{7}).

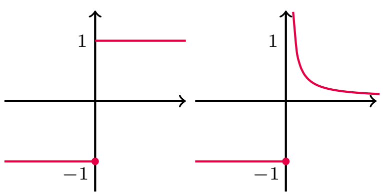
Marta SZUMAŃSKA

Ciągłość

Ciągłość funkcji – na początku odwołamy się do intuicyjnego rozumienia tego pojęcia, by następnie je uściślić. Jeśli funkcja rzeczywista określona na przedziale jest ciągła, to jej wykres jest „w jednym kawałku” (można go narysować bez odrywania ołówka od kartki). Funkcje

$$f_1(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x > 0 \\ -1 & \text{dla } x \leqslant 0 \end{cases} \quad \text{oraz} \quad f_2(x) = \begin{cases} 1/x & \text{dla } x > 0 \\ -1 & \text{dla } x \leqslant 0 \end{cases}$$

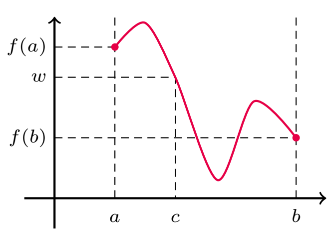
nie są ciągłe – w obu przypadkach $x_0 = 0$ jest argumentem, w którym wykres funkcji „rozrywa się”; jest to tzw. punkt nieciągłości funkcji. Funkcja ciągła nie może mieć punktów nieciągłości, czyli w każdym punkcie swojej dziedziny musi być ciągła. Pozostaje ściśle określić, co to wszystko znaczy. Ciągłość funkcji w punkcie można wyrazić w języku zbieżności ciągów: *funkcja $f : D_f \to \mathbb{R}$ jest ciągła w $x_0 \in D_f$, jeśli dla każdego ciągu o wyrazach $x_n \in D_f$ zbieżnego do x_0 ciąg $f(x_n)$ jest zbieżny do $f(x_0)$*. Łatwo teraz sprawdzić formalnie, przyjmując $x_n = 1/n$, że funkcje f_1 i f_2 nie są ciągłe w zerze – ciągi o wyrazach $f_1(1/n) = 1$ (ciąg stały) oraz $f_2(1/n) = n$ nie są zbieżne do $f_1(0) = f_2(0) = -1$.



Rys. 2. Wykresy funkcji f_1 i f_2

Gdy już wiemy, czym są funkcje ciągłe, zauważmy, że jest ich mnóstwo w otaczającym nas świecie – przyjrzyjmy się tylko funkcjom zależnym od czasu: temperatura w nagrzewającym się piekarniku zmienia się w sposób ciągły, ciśnienie w punkcie pomiarowym również, prędkość samochodu, nawet takiego z super mocnym silnikiem i hamulcami, nie może zmieniać się skokowo.

Warto podkreślić, że o ciągłości funkcji można mówić tylko w punktach jej dziedziny. Gdybyśmy przyjęli, że dziedziną funkcji f_1 i f_2 jest $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, to byłyby one ciągłe w każdym punkcie swojej dziedziny, a więc byłyby funkcjami ciągłymi (mimo, że ich wykresy składają się z dwóch „kawałków”). Podobnie funkcja tangens jest ciągła, mimo iż jej wykres ma nieskończenie wiele składowych.



Rys. 3. Ilustracja własności Darboux

Istnieją funkcje, które nie są ciągłe w żadnym punkcie swojej dziedziny; sztandarowym przykładem jest funkcja Dirichleta, która przyjmuje wartość 0 dla wszystkich argumentów wymiernych i 1 dla wszystkich niewymiernych.

Funkcje ciągłe są bohaterami wielu ważnych twierdzeń matematycznych. Jedno z nich orzeka, że funkcja ciągła określona na przedziale posiada **własność Darboux**, czyli przyjmuje wszystkie wartości pośrednie: dla dowolnych a, b w tym przedziale oraz w leżącego między $f(a)$ i $f(b)$ istnieje $c \in [a, b]$, dla którego $f(c) = w$ (rys. 3). Funkcje o własności Darboux nie muszą być jednak ciągłe. Istnieją takie ekstremalne przykłady funkcji, dla których obraz dowolnego przedziału jest całą prostą rzeczywistą! Taka funkcja oczywiście spełnia własność Darboux i oczywiście nie może być ciągła (dlaczego?). Czytelniku, czy potrafisz skonstruować takiego potwora?

Własność Darboux pozwala na przykład stwierdzać istnienie rozwiązań rozmaitych skomplikowanych równań, bez rozwiązywania ich. Na przykład, żeby udowodnić, że istnieje (choćby jeden) x, dla którego spełniona jest równość $-x^2 + \sin(\pi x)\cos^2(\pi x) = \log_2(1+x) - 1$, wystarczy zauważyć, że ciągła funkcja

$$f(x) = \\ = -x^2 + \sin(\pi x)\cos^2(\pi x) - \log_2(1+x) + 1,$$

przyjmuje wartości $f(0) = 1$ i $f(1) = -\log_2 2 < 0$, zatem dla pewnego $x \in (0, 1)$ funkcja przyjmuje wartość zero i ten właśnie x jest rozwiązaniem naszego równania.

Marta SZUMAŃSKA