wiadomo, że w wybuchach supernowych, także tych związanych z termojądrową eksplozją białego karła, tzn. supernowych typu Ia, działają przeważnie procesy typu s oraz szybkie przechwyty protonów: supernowe dostarczają pierwiastków od miedzi $_{29}$Cu do molibdenu $_{42}$Mo.

Metale takie jak stront $_{38}$Sr, itr $_{39}$Y, cyrkon $_{40}$Zr, niob $_{41}$Nb są tworzone również podczas procesów s w ostatnich etapach ewolucji gwiazd asymptotycznej gałęzi olbrzymów.

Począwszy od rutenu $_{44}$Ru proces s ustępuje miejsca procesowi r: ciężkie pierwiastki tworzone są głównie podczas katastrofalnych zderzeń w *układach podwójnych gwiazd neutronowych*. Niedawna, historycznie pierwsza detekcja fal grawitacyjnych ze zderzenia się gwiazd neutronowych (sygnał GW170817, o którym pisaliśmy w Δ^{12}_{17}), zarejestrowana przez interferometry Virgo i LIGO (i przeprowadzona przez te interferometry triangulacja) umożliwiła powiązanie go z wykrytym w tym samym czasie przez satelitę Fermi krótkim błyskiem gamma, i szerokie obserwacje astronomiczne fotonów z następującej po nim emisji *kilonowej*. Dzięki temu zdobyliśmy dowody, że rozrzucona podczas zderzenia z prędkościami bliskimi prędkości światła gęsta neutrononadmiarowa materia gwiazd neutronowych jest świetnym miejscem dla procesów typu r i tworzenia naprawdę ciężkich pierwiastków, w tym platyny $_{78}$Pt i złota $_{79}$Au, a także metali z grupy ziem rzadkich (wspomnianych wcześniej dysprozu, neodymu, terbu), innych lantanowców i aktynowców, oraz pierwiastków radioaktywnych, między innymi polonu $_{84}$Po, radu $_{88}$Ra i uranu $_{92}$U. Podobnie jak w przypadku supernowych kilonowe są zasilane energią fotonów z rozpadów radioaktywnych, więc badanie ich krzywych blasku umożliwia stwierdzenie, ile i jakich pierwiastków danego rodzaju świeci.

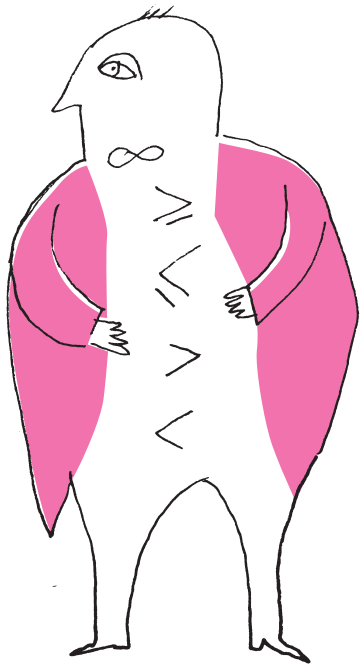
Kilonowa wybucha z energią około tysiąca razy większą niż nowa klasyczna, czyli termojądrowy zapłon materii zaakreowanej w układzie podwójnym na powierzchnię białego karła z towarzysza, zwykłej gwiazdy.

Powtarzając za nieocenionym Carlem Saganem, dosłownie pochodzimy z Kosmosu: poprzednie generacje gwiazd „umarły", a my powstaliśmy na planecie stworzonej z ich różnorodnych pozostałości. Życie, w tej jedynej znanej nam do tej pory formie, wymaga garści różnych, przeważnie lekkich i łatwo osiągalnych pierwiastków, natomiast cywilizacja i postęp technologii korzysta z coraz bardziej egzotycznych i trudno dostępnych materiałów powstałych w największych kosmicznych katastrofach. Atomy składające się na najważniejszy obecnie element ludzkiego „fenotypu rozszerzonego" (mam, oczywiście, na myśli smartfon) przebyły niezwykle skomplikowaną drogę z wnętrz gwiazd do wnętrz naszych kieszeni; warto o tym pamiętać.

Niewąskie nierówności

*Karol HOROCH**

* nauczyciel, Liceum Przymierza Rodzin w Warszawie



Nierówności między średnimi, a w szczególności nierówność między średnią arytmetyczną i geometryczną (oznaczana dalej A-G), to jedne z podstawowych narzędzi dowodowych w arsenale każdego olimpijczyka. Przypomnijmy sformułowanie A-G:
Dla dowolnego ciągu n nieujemnych liczb $a_1, \ldots, a_n$ spełniona jest nierówność

$$\sqrt[n]{a_1 \cdots a_n} \leqslant \frac{a_1 + \ldots + a_n}{n},$$

przy czym równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.
Twierdzenie to dowodzone jest zwykle indukcyjnie lub za pomocą twierdzenia Jensena, ale jeśli dowody te pozostawiły w Tobie, drogi Czytelniku, niedosyt i wciąż masz wrażenie, że nierówność A-G pozostaje nieintuicyjna, być może znajdziesz ukojenie w poniższym rozumowaniu. Naturalnie, tych, którzy nie widzieli jeszcze żadnego dowodu A-G, również zapraszamy do lektury.

Na początek przedstawimy dwie obserwacje, które powinny się wydać oczywiste każdemu zaznajomionemu z pojęciem średniej arytmetycznej:

- Biorąc dowolne dwie spośród liczb $a_1, \ldots, a_n$, a następnie zwiększając jedną z nich o ε, a drugą zmniejszając o ε (gdzie ε jest dowolną liczbą dodatnią), nie zmienimy wartości średniej arytmetycznej liczb $a_1, \ldots, a_n$.
- Jeśli jedna z liczb $a_1, \ldots, a_n$ jest większa od średniej arytmetycznej tych liczb, to jest też pośród nich liczba mniejsza od tej średniej i *vice versa*.

Proste? No więc możemy iść dalej.

Następnym krokiem będzie zdefiniowanie operacji *zwężania do średniej*. Mając dany ciąg liczb $a_1, \ldots, a_n$ o średniej arytmetycznej s, weźmy takie dowolne dwie a_i, a_j, że $a_i < s < a_j$. Mniejsza jest odległa od średniej o $s - a_i$, a większa o $a_j - s$. Niech Δ będzie mniejszą z tych dwóch różnic. Zwężenie do średniej liczb a_i i a_j polega na jednoczesnym zmniejszeniu a_j i zwiększeniu a_i o Δ. Przykładowo, jeśli w zadanym ciągu liczb średnia arytmetyczna wynosiła 7, to liczby 13 i 2 zostaną zwężone do liczb 8 i 7, a liczby 5 i 9 zwężone do 7 i 7.

Operacja zwężania ma trzy cechy godne odnotowania:

1. Zwężenie dowolnych dwóch liczb z ciągu nie zmienia średniej arytmetycznej całego ciągu.
2. Za każdym razem gdy dokonujemy zwężenia, przynajmniej jedna ze zwężanych liczb zrównuje się ze średnią.
3. Za pomocą skończonej liczby operacji zwężania możemy zrównać wszystkie zadane liczby z ich średnią.

Jeśli w tym momencie, Szanowny Czytelniku, zmarszczyłeś brwi poruszony myślą „Czy aby na pewno? Dla dowolnych ciągów $a_1, \ldots, a_n$? W skończonej liczbie kroków?", spieszymy z wyjaśnieniami. Otóż, dopóki nie zrównamy wszystkich liczb ze średnią, zawsze będzie para liczb do zwężenia różnych od średniej. Zanim więc nie osiągniemy celu, możemy zwężać, a z każdym zwężeniem liczba liczb różnych od średniej zmniejsza się o jedną lub o dwie. Dla zilustrowania tego procesu na marginesie przedstawiamy ciąg takich zwężeń dla liczb 8, 18, 6, 10, 21, 16, 26 (których średnia arytmetyczna wynosi 15), gdzie pogrubione zostały pary liczb podlegających zwężeniu.

8,	**18**,	6,	10,	21,	16,	26	→
11,	15,	6,	10,	**21**,	16,	26	→
15,	15,	**6**,	10,	**17**,	16,	26	→
15,	15,	**8**,	10,	15,	**16**,	26	→
15,	15,	**9**,	10,	15,	15,	**26**	→
15,	15,	15,	**10**,	15,	15,	**20**	→
15,	15,	15,	15,	15,	15,	15	

Nadszedł czas na *grande finale*, w którym wyjaśni się, jaki był cel całego zamieszania ze zwężeniami. Jest jasne, że zwężanie nie zmienia wartości sumy liczb, a tym samym ich średniej arytmetycznej. Co natomiast z iloczynem, a w konsekwencji – ze średnią geometryczną? Zachowując poprzednio wprowadzone oznaczenia, załóżmy, bez utraty ogólności, że liczby a_i oraz a_j zwężamy o Δ. Iloczyn zmieni się wtedy na $a_1 \cdot \ldots \cdot (a_i + \Delta) \cdot \ldots \cdot (a_j - \Delta) \cdot \ldots \cdot a_n$. Wartość tego iloczynu będzie większa niż oryginalnego $a_1 \cdot \ldots \cdot a_n$, gdyż

$$(a_i + \Delta)(a_j - \Delta) = a_i a_j + \Delta(a_j - a_i) - \Delta^2 \geqslant a_i a_j + 2\Delta^2 - \Delta^2 > a_i a_j$$

(w przedostatnim kroku skorzystaliśmy z nierówności $a_j - a_i \geqslant 2\Delta$). Widać więc, że zwężanie zwiększa iloczyn zwężanych liczb. Oznacza to, że średnia geometryczna wszystkich liczb również się zwiększa! Prawdziwość A-G powinna się teraz objawić w całej swojej oczywistości. Mając ciąg liczb, które nie są parami równe, dokonujemy skończonej liczby zwężeń aż do zrównania ich ze średnią arytmetyczną. Kiedy to nastąpi i wszystkie liczby z naszego ciągu będą parami równe, obie średnie także się zrównają. Ponieważ jednak z każdym zwężeniem średnia geometryczna zwiększała się, a arytmetyczna nie ulegała zmianom, wnioskujemy, iż dla wyjściowego ciągu średnia geometryczna była mniejsza od arytmetycznej. To kończy dowód.

Dociekliwym Czytelnikom pozostawiamy sprawdzenie, że analogicznie można przeprowadzić dowód nierówności:

$$\frac{a_1 + \ldots + a_n}{n} \leqslant \sqrt[p]{\frac{a_1^p + \ldots + a_n^p}{n}},$$

gdzie p jest dodatnią liczbą naturalną, a $a_1, \ldots, a_n$ są nieujemnymi liczbami rzeczywistymi. Podpowiemy, iż należy zbadać, jak zwężanie liczb wpływa na wartość $a_i^p + a_j^p$, korzystając ze wzoru dwumianowego Newtona.

Nasuwa się pytanie, czy są inne nierówności między średnimi, które można udowodnić w analogiczny sposób, tzn. wynajdując przekształcenie ciągu danych liczb, podobne do powyższego zwężania do średniej? Takie przekształcenie powinno mieć dwie cechy: 1) nie zmieniając wartości jednej ze średnich, zawsze zwiększa (ew. zmniejsza) drugą z nich; 2) w skończonej liczbie kroków wyrównuje wszystkie liczby, tym samym wyrównując obie średnie. Z tym pytaniem pozostawiamy Czytelnika.

Praca zwycięzcy Konkursu Uczniowskich Prac z Matematyki z roku 1985, Piotra Hajłasza, zawierała odpowiedzi na te pytania – patrz Δ^{03}_{86}.

Rozwiązanie zadania M 1570.
Odpowiedź: Taki wielościan istnieje.

Rozważmy prostopadłościan $\mathcal{W}$ o wymiarach

$$\sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{4} \times 2.$$

Przecinając ten prostopadłościan płaszczyzną przechodzącą przez środki krawędzi o długości 2, rozetniemy go na dwa przystające prostopadłościany o wymiarach $1 \times \sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{4}$. Każdy z nich jest podobny do $\mathcal{W}$ w skali $\sqrt[3]{2}$.

Rozwiązanie zadania M 1572.
Zauważmy, że reszta z dzielenia liczby n przez liczbę k jest równa

$$n - k\left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor,$$

wobec tego równość $r(n) = r(n-1)$ można przepisać jako

$$\sum_{k=1}^{n} n - k\left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor = \sum_{k=1}^{n-1} n - 1 - k\left\lfloor \frac{n-1}{k} \right\rfloor,$$

czyli równoważnie

$$2n - 1 = \sum_{k=1}^{n} k\left(\left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n-1}{k} \right\rfloor\right).$$

Zauważmy ponadto, że czynnik

$$\left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n-1}{k} \right\rfloor$$

jest równy 1, jeżeli k dzieli n oraz 0 w przeciwnym przypadku. Stąd wniosek, że powyższy warunek można przepisać jako

$$2n - 1 = \sum_{k|n} k.$$

Łatwo sprawdzić, że równość ta jest spełniona dla $n = 2^m$, gdzie m jest dodatnią liczbą całkowitą. Przykładową nieskończoną rodzinę liczb n spełniających warunek zadania stanowią więc wszystkie potęgi dwójki.