Kącik olimpijski (22)

Pierwiastki łańcuchowe

Niech $x > 1$ będzie ustaloną liczbą rzeczywistą. Rozważmy ciągi (a_n) i (b_n) określone rekurencyjnie wzorami

$$b_1 = x, \qquad a_n = [b_n^2 - b_n], \qquad b_{n+1} = b_n^2 - a_n \qquad \text{dla } n \in \mathbf{N}$$

(symbol $[\,l\,]$ oznacza największą liczbę całkowitą nie większą od l). Zauważmy najpierw, że wszystkie wyrazy ciągu (b_n) są dodatnie. Istotnie, mamy

$$b_{n+1} = b_n^2 - a_n = b_n^2 - [b_n^2 - b_n] \geq b_n^2 - (b_n^2 - b_n) = b_n\,,$$

a stąd wynika, że $b_n \geq b_1 > 1$. Skoro tak, to mamy także $b_n^2 \geq b_n$, a więc a_n są nieujemnymi liczbami całkowitymi.

Rozważmy teraz ciąg (x_n) określony wzorem

$$x_n = \sqrt{a_1 + \sqrt{a_2 + \cdots + \sqrt{a_n}}} \qquad \text{dla } n \in \mathbf{N}\,.$$

Dla n, k naturalnych, $1 \leq k \leq n$, oznaczmy $x_{k,n} = \sqrt{a_k + \sqrt{a_{k+1} + \cdots + \sqrt{a_n}}}$. Wykażemy, że dla każdego $k = 1, 2, \ldots, n$, przy ustalonym $n \in \mathbf{N}$, zachodzi równość

$$b_k - x_{k,n} = \frac{b_{n+1}}{\prod\limits_{i=k}^{n} (b_i + x_{i,n})}\,. \tag{1}$$

Dla $k = n$ istotnie tak jest, bowiem $b_n - \sqrt{a_n} = (b_n^2 - a_n)/(b_n + \sqrt{a_n})$ i $x_{n,n} = \sqrt{a_n}$, a zatem z definicji b_{n+1} mamy $b_n - x_{n,n} = b_{n+1}/(b_n + x_{n,n})$.

Załóżmy prawdziwość równości (1) dla pewnego k. Dla $k-1$ mamy wówczas, na mocy założenia indukcyjnego,

$$b_{k-1} - x_{k-1,n} = \frac{b_{k-1}^2 - x_{k-1,n}^2}{b_{k-1} + x_{k-1,n}} = \frac{(b_k + a_{k-1}) - (a_{k-1} + \sqrt{a_k + \cdots + \sqrt{a_n}})}{b_{k-1} + x_{k-1,n}} =$$

$$= \frac{b_k - x_{k,n}}{b_{k-1} + x_{k-1,n}} = \frac{b_{n+1}}{(b_{k-1} + x_{k-1,n})\prod\limits_{i=k}^{n}(b_i + x_{i,n})} = \frac{b_{n+1}}{\prod\limits_{i=k-1}^{n} (b_i + x_{i,n})},$$

co kończy dowód indukcyjny (proszę zauważyć, że była to indukcja do tyłu). W szczególności, dla $k = 1$ równość (1) przyjmuje postać

$$x - x_n = \frac{b_{n+1}}{\prod\limits_{i=1}^{n} (b_i + x_{i,n})}\,. \tag{2}$$

Ponieważ $b_i \geq b_1 = x$, a liczby $x_{i,n}$ są nieujemne, więc mianownik ułamka po prawej stronie można oszacować z dołu przez x^n. Z drugiej strony, $b_{n+1} = b_n^2 - [b_n^2 - b_n] < b_n^2 - (b_n^2 - b_n - 1) = b_n + 1$, a stąd przez indukcję dostajemy $b_{n+1} < b_1 + n = x + n$. Ostatecznie, z równości (2) otrzymujemy

$$|x - x_n| \leq \frac{x + n}{x^n}\,.$$

Wobec nierówności $x > 1$ mamy $\lim\limits_{n \to \infty} (x + n)/x^n = 0$. Zatem ciąg (x_n) jest zbieżny do x. Udowodniliśmy w ten sposób

Twierdzenie.
Dla każdej liczby rzeczywistej $x > 1$ istnieje taki ciąg (a_n) liczb całkowitych nieujemnych, że ciąg $x_n = \sqrt{a_1 + \sqrt{a_2 + \cdots + \sqrt{a_n}}}$ jest zbieżny do x.

Przykłady.
(a) Dla $x = 3$ mamy $b_1 = 3 = b_2 = b_3 = \ldots$ oraz $a_1 = [3^2 - 3] = 6 = a_2 = a_3 = \ldots$ Ogólnie, dla dowolnej liczby naturalnej $n > 1$, mamy

$$n = \sqrt{n^2 - n + \sqrt{n^2 - n + \sqrt{n^2 - n + \cdots}}}\,.$$

(b) Gdy $x = (1 + \sqrt{5})/2$ jest współczynnikiem złotej proporcji, wszystkie wyrazy ciągu a_n są równe 1.

Witold BEDNAREK

Errata

Treść zadania **6.** z zawodów stopnia pierwszego XLIX Olimpiady Matematycznej sformułowano błędnie. Prawidłowe sformułowanie jest następujące:

6. W trójkącie ABC, w którym $AB > AC$, punkt D jest środkiem boku BC, punkt E leży na boku AC. Punkty P i Q są odpowiednio rzutami prostokątnymi punktów B i E na prostą AD. Udowodnić, że $BE = AE + AC$ wtedy i tylko wtedy, gdy $AD = PQ$.

Za utrudnienia związane z tym błędem serdecznie przepraszamy. Termin nadsyłania rozwiązań zadania **6.** przedłużamy do dnia
10 grudnia 1997 r.

Komitet Główny Olimpiady Matematycznej

Rozwiązanie zadania F 465.
Przyjmując, że prawdopodobieństwo znalezienia dowolnej cząsteczki w objętości v, będącej częścią dużo większej objętości V, jest proporcjonalne do v, otrzymujemy, że liczba cząsteczek w objętości v podlega statystyce Poissona

$$P(n;\nu) = \frac{e^{-\nu}\nu^n}{n!},$$

gdzie ν jest średnią liczbą cząsteczek w objętości v. Wiedząc, że wariancja rozkładu Poissona $P(n;\nu)$ wynosi ν, dostajemy

$$\overline{\delta^2} = \overline{\left(\frac{n-\nu}{\nu}\right)^2} = \frac{\overline{(n-\nu)^2}}{\nu^2} = \frac{1}{\nu}\,.$$