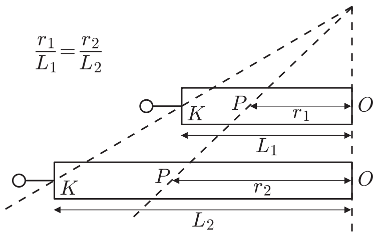
e z gumy

*Bartosz SMOCZYŃSKI**

Filmik demonstrujący opisane w tekście doświadczenie można odnaleźć na stronie `deltami.edu.pl`

Jak znaleźć e na gitarze? Nawet początkujący gitarzysta wie, że przy standardowym nastrojeniu właśnie taki dźwięk wydają dwie skrajne struny. My jednak będziemy szukać innego e, a mianowicie pewnej znanej i przydatnej stałej matematycznej. Powiedzmy, że z jakiegoś powodu chcemy poddać próbie wytrzymałość strun. W tym celu kręcimy kołkiem do momentu, w którym długość nawiniętej na niego części struny będzie taka sama, jak długość części nienawiniętej. Pytanie brzmi: ilukrotnie w takim procesie musiałaby rozciągnąć się struna? Aby udzielić na nie odpowiedzi, rozważymy analogiczną sytuację, w której zamiast strun przyglądamy się gumie.

Uzbrójmy się zatem w długi pas rozciągliwej gumy, której jeden koniec unieruchamiamy w początkowym punkcie zaczepienia O. Drugi koniec wyposażamy w uchwyt, by dało się ją swobodnie rozciągać. Potrzebna też będzie powierzchnia (np. stół), na której kładziemy gumę tak, aby można było wygodnie mierzyć odległości. Zwróćmy uwagę, że rozciąganie gumy nie zmienia stosunku odległości między umieszczonymi na niej punktami. Ściślej, dla pewnego punktu P, zaznaczonego na gumie, jeśli $d(t)$ oznacza jego odległość od punktu zaczepienia O w chwili t, a $L(t)$ długość gumy, to zachodzi proporcja



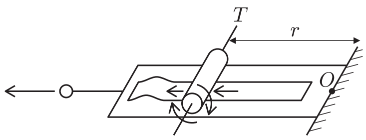
Rys. 1

(1) $$\frac{d(t_1)}{L(t_1)} = \frac{d(t_2)}{L(t_2)}, \quad \text{dla dowolnych } t_1, t_2 > 0.$$

Można więc wprowadzić wielkość $q = \frac{d}{L}$, opisującą *umiejscowienie* punktu na gumie, niezależną od rozciągnięcia gumy. Różniczkując równanie $d = qL$ względem t, można otrzymać wyrażenie na prędkość $\dot{d}$ punktu P

(2) $$\dot{d}(t) = q\dot{L}(t) = \frac{d(t)}{L(t)}\dot{L}(t) = d(t)\big(\ln L(t)\big)'.$$

W odległości r od O umieśćmy teraz nad gumą stykający się z nią, swobodnie obracający się walec, którego oś przytwierdzona jest do stołu. Rozciągająca się pod nim guma będzie powodowała jego obrót. Za pomocą wstęgi materiału umieszczonej między walcem a gumą możemy zmierzyć długość drogi, jaką przebył punkt dowolnie ustalony na obwodzie walca (rys. 2) i wielkość tę oznaczymy przez Δx. Przyjmijmy, że rozciąganie przebiega w przedziale czasowym (t_0, t_1). Okazuje się, że wygodnie będzie obliczyć szukaną wartość, zaczynając od wyznaczenia prędkości $v(t)$ przesuwania się gumy pod walcem w dowolnej chwili t. Z (2) można wywnioskować, że



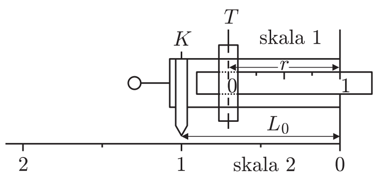
Rys. 2

$$v(t) = r\big(\ln L(t)\big)'.$$

Aby wyznaczyć przesunięcie Δx, pozostaje scałkować funkcję $v(t)$ względem czasu w przedziale (t_0, t_1), otrzymując $\Delta x = r\ln\big(L_1/L_0\big)$, gdzie $L_0 = L(t_0)$ i $L_1 = L(t_1)$. Zapiszmy uzyskany wynik w postaci

(3) $$\frac{\Delta x}{r} = \ln\frac{L_1}{L_0}.$$

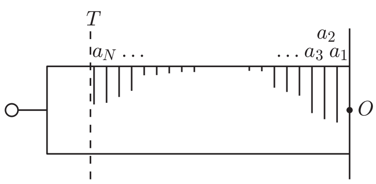
Pasek materiału możemy teraz wyposażyć w skalę, na której za jednostkę przyjmujemy r. W ten sposób odczytana tam niemianowana wartość x będzie wynosiła $\frac{\Delta x}{r}$. Umieśćmy też w punkcie końcowym K wskaźnik, którego przesunięcie będziemy mierzyć na drugiej skali, nieruchomej względem O, o jednostce L_0. Jej wskazanie D będzie więc wynosić $\frac{L_1}{L_0}$ (rys. 3). W ten sposób zależność (3) można uprościć do postaci



Rys. 3

$$x = \ln D \quad \text{czy też} \quad D = e^x.$$

Powyższy związek między wskazaniami na skalach pozwala nam więc na doświadczalne wyznaczenie liczby e (poprzez rozciąganie do chwili, gdy wartość na skali pierwszej wyniesie 1 i odczytanie wyniku na skali drugiej) lub, na przykład, $\ln 2$ (poprzez dwukrotne rozciągnięcie gumy i odczytanie wyniku na skali pierwszej).



Rys. 4

Zależność (3) można również wyznaczyć za pomocą mniej formalnego rozumowania, które nie wymaga całkowania funkcji. Połóżmy walec na końcu gumy, a między nim a początkiem gumy umieśćmy w równych odstępach N punktów pomiarowych i oznaczmy je, zaczynając od tego najbliżej O, przez $a_1, a_2, \ldots, a_N$ (rys. 4). Niech τ_i będzie momentem przejścia punktu a_i pod

*uczeń V LO im. Księcia Józefa Poniatowskiego w Warszawie

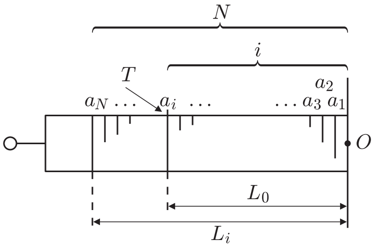
walcem. Obrót walca Δx będziemy wyznaczać, sumując składowe obroty $\mathrm{d}x_i$, z których każdy mierzony jest od chwili τ_{i+1} do chwili τ_i. Przez L_i oznaczymy długość gumy w chwili τ_i. Zauważmy, że dla wystarczająco dużej liczby N wartość $\mathrm{d}x_i$ można przybliżyć przez $\frac{L_i}{N}$. Oczywiste jest, że w chwili τ_i między walcem i początkiem gumy znajduje się i punktów pomiarowych, co z uwagi na równomierne rozmieszczenie punktów pomiarowych na gumie (rys. 5) daje proporcję: $i/N \approx L_0/L_i$. Jeśli końcowa długość gumy wyniosła L_1, to z powyższej proporcji wynika, że rozciąganie zakończyło się w chwili $i = \lfloor N\frac{L_0}{L_1}\rfloor$. Wobec tego możemy obliczyć

$$\Delta x = \sum_{i=\lfloor N\frac{L_0}{L_1}\rfloor}^{N} \mathrm{d}x_i = \sum_{i=\lfloor N\frac{L_0}{L_1}\rfloor}^{N} \frac{L_i}{N} \approx \sum_{i=\lfloor N\frac{L_0}{L_1}\rfloor}^{N} \frac{L_0}{i} = L_0 \sum_{i=\lfloor N\frac{L_0}{L_1}\rfloor}^{N} \frac{1}{i}.$$

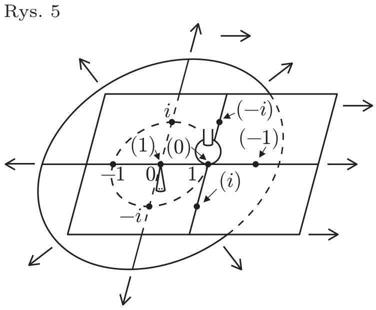
W tym miejscu możemy zastosować oszacowanie $\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{i} \approx \ln N$, skąd wreszcie, pomijając znak części całkowitej:

$$\Delta x = L_0\left(\ln N - \ln N\frac{L_0}{L_1}\right),$$

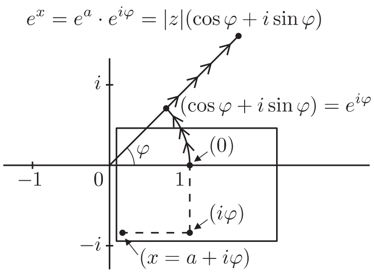
co jest równoważne z (3).



Rys. 5



Rys. 6



Rys. 7

Powstaje naturalne pytanie, czy nasze urządzenie można ulepszyć w taki sposób, by demonstrowało działanie funkcji wykładniczej dla argumentów zespolonych. Teoretycznie jest to możliwe. Pas gumy zastępujemy kwadratową, gumową płachtą, unieruchomioną w jednym punkcie, względem którego może się ona obracać. Jej rozciąganie będzie się odbywać równomiernie w obu kierunkach, równoległych do krawędzi płachty. Także pas materiału używany do pomiaru należy zamienić na materiałową płachtę. Obie skale uzupełniamy o oś urojoną, a w miejscu walca umieszczamy kulę dociskającą materiał do gumy. Podczas ruchów gumy materiał ma się przesuwać, ale nie obracać. Załóżmy, że w wyniku pewnego obrotu i rozciągnięcia gumy znajdujący się na niej wskaźnik został przemieszczony do punktu z, a wynik odczytany na skali materiałowej wyniósł x. Wykorzystując wcześniejsze rozważania oraz fakt, że obrót gumy o kąt φ przekłada się na zmianę odczytu na skali materiałowej o $i\varphi$, można stwierdzić, że wówczas $z = e^x$. Nasza konstrukcja w naturalny sposób rozszerza więc definicję funkcji wykładniczej na zespolone argumenty. Niestety, jej wykonanie w warunkach domowych nie wydaje się możliwe i należy ją rozpatrywać raczej w kategoriach doświadczenia myślowego niż propozycji do samodzielnego wykonania.

Mam nadzieję, że niniejszym tekstem choć na chwilę wyprowadziłem e z krainy matematycznych abstraktów i przekonałem Czytelnika, że nie trzeba wielkiego wysiłku, aby samemu je „upolować” w otaczającej nas rzeczywistości.

Brzydka prawda

Wielościan wypukły, którego ściany są jednakowymi wielokątami foremnymi, może mieć ściany trójkątne, czworokątne lub pięciokątne. Ostatnie dwa przypadki realizują się tylko w postaci sześcianu i dwunastościanu. Pozostałe trzy wielościany foremne reprezentują pierwszy przypadek (czworościan, ośmiościan i dwudziestościan), ale nie są one jedynymi wielościanami wypukłymi, których ściany są trójkątami równobocznymi – np. „górna” i „dolna” piątka ścian dwudziestościanu składa się na dziesięciościan przypominający dysk.

Oznaczmy przez w liczbę wszystkich wierzchołków wielościanu, w_i – liczbę tych wierzchołków, w których zbiega się i ścian (oczywiście $i = 3$, 4 lub 5), przez k liczbę krawędzi i przez s liczbę ścian.

Aby znaleźć wszystkie takie wielościany, można rozumować tak:

$$3s = 2k = 3w_3 + 4w_4 + 5w_5,$$

bo każda ściana ma trzy krawędzie, a każda krawędź należy do dwóch ścian, a także łączy dwa wierzchołki.

Ponieważ na dodatek $w = w_3 + w_4 + w_5$, więc wstawiając to do wzoru Eulera: $w - k + s = 2$, dla wygody pomnożonego przez 6, otrzymujemy

$$6(w_3+w_4+w_5) - 3(3w_3+4w_4+5w_5) + 2(3w_3+4w_4+5w_5) = 12,$$

czyli

$$3w_3 + 2w_4 + w_5 = 12.$$

To równanie ma 19 rozwiązań w liczbach naturalnych: **4,0,0**; 3,1,1; 3,0,3; 2,3,0; 2,2,2; 2,1,4; 2,0,6; 1,4,1; 1,3,3; 1,2,5; 1,1,7; 1,0,9; **0,6,0**; 0,5,2; 0,4,4; 0,3,6; 0,2,8; 0,1,10; **0,0,12**.

Niestety, tylko osiem z nich (zaznaczone są kolorem) odpowiada wielościanowi wypukłemu (te grubszą czcionką to foremne).

I tu jest miejsce na zwrot *brzydka prawda*: fakt ten nosi dumną nazwę **twierdzenie Freudenthala–van der Waerdena**, ale mimo naturalnej materii, jakiej dotyczy, nie ma dotąd naturalnego i eleganckiego dowodu.

Więc może któryś z Czytelników?

M.K.