Czy liczby rzeczywiste są rzeczywiste?

prof. dr
Roman SIKORSKI,
członek rzeczywisty PAN

Liczby naturalne są niewątpliwie naturalne. Liczby całkowite niewątpliwie zasługują na nazwę „całkowite". Liczby wymierne należałoby może nazywać liczbami mierzącymi lub wymierzającymi, bowiem wszystkie pomiary wykonujemy w praktyce w liczbach wymiernych, zresztą nie tylko pomiary: wszelkie rachunki na konkretnych liczbach wykonywane są w praktyce wyłącznie w obrębie liczb wymiernych. Po co więc wprowadzać szersze, lecz znacznie trudniejsze pojęcie liczb rzeczywistych, skoro liczby wymierne wystarczają w rachunkach? Definicja liczb rzeczywistych nastręcza zawsze pewne trudności, wskutek tego w podręcznikach szkolnych jest raczej przemycana, niż precyzyjnie formułowana.

Pojęcie liczby naturalnej jest łatwe do przyswojenia. Tak łatwe, tak swojskie, że wydaje się, iż liczby naturalne są wzięte bezpośrednio z otaczającego świata materialnego. Zapominamy na ogół, że łatwo napisać, nawet na małym kawałku papieru, nazwę liczby naturalnej n, która jest nierealizowalna w świecie materialnym, tzn. dla której trudno podać przykład n-elementowego zbioru przedmiotów realnych. Liczba $n = 1000^{1000^{1000}}$ jest przykładem takiej nierealizowalnej liczby naturalnej. Początkowe liczby naturalne są łatwo wyobrażalne, nie można tego powiedzieć o liczbach bardzo dużych. Niemniej zbiór N wszystkich liczb naturalnych można łatwo zdefiniować.

Musi zawierać liczbę 1. Jeśli zawiera liczbę n, to musi zawierać także liczbę $n+1$. I nic więcej, tzn. jest najmniejszym zbiorem o powyższych dwu własnościach. Przytoczona definicja zbioru liczb naturalnych przypomina dowcip o pakowaniu do pustej walizki chusteczek do nosa. Oczywiście można tam włożyć jedną chusteczkę. Wiadomo z praktyki, że jeśli włożyliśmy do walizki n chusteczek, to $n+1$-sza też da się załadować. Zatem do walizki można włożyć tyle chusteczek, ile jest liczb naturalnych, czyli nieskończenie wiele!

Możemy sobie wyobrazić, że matematyk ma taką abstrakcyjną walizeczkę N zawierającą wszystkie liczby naturalne. W drugiej dodatkowej walizeczce nosi ich „odbicia lustrzane w zerze", tzn. liczby całkowite ujemne. Musi się jeszcze zdecydować, do której walizeczki włożyć liczbę zero. Zdania są podzielone, jedni lubią zaliczać zero do liczb naturalnych, inni tego nie lubią. Rzecz w istocie nie warta przysłowiowego funta kłaków. Kłócić się o zero? O matematyczne „nic"? Nie warto!

Oprócz walizeczek z liczbami całkowitymi matematyk ma także maszynkę do precyzyjnego siekania tych liczb. Mówiąc poważniej, matematyk z liczb całkowitych łatwo konstruuje liczby wymierne, tzn. „ułamki" m/n, gdzie m jest liczbą całkowitą, a n — liczbą naturalną (nie zerem!). Pewne z tych ułamków należy uznać za równe. Na ułamkach tych można w naturalny sposób zdefiniować podstawowe działania arytmetyczne: dodawanie i mnożenie, oraz wtórne działania odwrotne: odejmowanie i dzielenie (nie przez zero!). Można je też uporządkować, tzn. wprowadzić relację mniejszości $x < y$. Intuicyjnie łatwo sobie „wyobrazić" liczbę wymierną. Łatwo bowiem wyobrazić sobie n-tą część czegoś, to znaczy liczbę $1/n$; łatwo też wyobrazić sobie m takich części, tzn. liczbę m/n, z ewentualną zmianą znaku, czyli z „odbiciem lustrzanym w zerze".

Poczciwe liczby wymierne! Tak bardzo są użyteczne! Wszystkie transakcje handlowe, bankowe, wszelkie pomiary, wszelkie rachunki techniczne są na nich oparte. Z punktu widzenia czystej praktyki jest ich za dużo, bo nieskończenie wiele. W praktyce do rachunków używa się tylko skończenie wielu liczb wymiernych (trudno byłoby oszacować ile). Tak już jednak jest z matematykami. Jeśli coś tworzą, czynią to na ogół w pełnej ogólności, wskutek tego na wyrost, na ogół więcej niż jest to potrzebne w praktyce.

Przyjęliśmy milcząco, że p i q są wszystkimi pierwiastkami równania. Może się zdarzyć, że $p = q$ i równanie ma jeszcze inny pierwiastek, prócz liczby $p(= q)$. Należałoby postąpić następująco: warunki zadania oznaczają, że $p^2+p \cdot p+q = 0$ i $q^2+pq+q = 0$. Jest więc $q = -2p^2$. Z drugiego równania wynika więc, że $4p^4-2p^3-2p^2 = 0$ czyli $2p^2(2p^2-p-1) = 0$, skąd $p = 0$ lub $p = 1$ lub $p = -\frac{1}{2}$.

Odpowiadające wartości q to $0, -2$ i $-\frac{1}{2}$.

W porównaniu z metodą przedstawioną na str. 8 otrzymaliśmy dodatkowo rozwiązanie $p = q = -\frac{1}{2}$.

Niestety zbiór liczb wymiernych ma wady. Wprawdzie jest gęsty, tzn. dla dowolnych dwu liczb wymiernych istnieje trzecia położona między nimi. Jest jednak dziurawy, przy tym jego dziury są również rozmieszczone w sposób gęsty, tzn. między dowolnymi dwiema liczbami wymiernymi znajduje się zawsze dziura. Te dziury biorą się nie ze starości zbioru, nie wskutek przetarcia zbioru w wyniku tak częstego używania liczb wymiernych w praktyce. Po prostu taka jest matematyczna natura tego zbioru. Zbiór liczb wymiernych ma postać bardzo gęstego jednowymiarowego sita.

Musimy wyjaśnić, co rozumiemy przez dziurę w zbiorze liczb wymiernych (zawodowi matematycy mówią „luka" zamiast „dziura"). Dziurą nazywamy taki

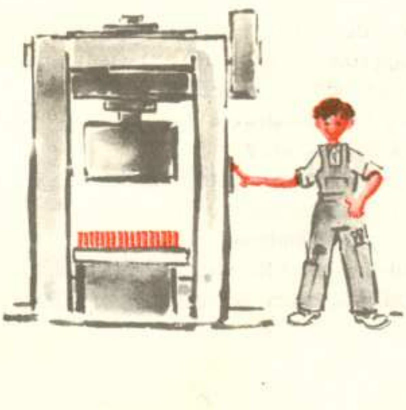
podział zbioru W wszystkich liczb wymiernych na dwa niepuste podzbiory W_1 i W_2, że po pierwsze każda liczba ze zbioru W_1 jest mniejsza od każdej liczby zbioru W_2, oraz — po drugie — w zbiorze W_1 nie ma liczby największej, a w zbiorze W_2 nie ma liczby najmniejszej. Mówimy, że taka dziura leży między liczbami wymiernymi w_1 i w_2 ($w_1 < w_2$), jeśli w_1 należy do W_1, a w_2 należy do W_2 Na przykład, zaliczmy do W_1 wszystkie ujemne liczby wymierne i te nieujemne, których kwadrat jest mniejszy od 2, a do W_2 zaliczmy wszystkie dodatnie liczby wymierne, których kwadrat jest większy od 2. Podział zbioru W na zbiory W_1, W_2 jest dziurą (luką) w zbiorze liczb wymiernych. Bardzo łatwo sprawdzić, że dziura ta leży między liczbami 1 i 2. Bez trudu można by wyznaczyć bardziej dokładnie położenie tej dziury. Prosty rachunek dowodzi, że leży ona między $1{,}41$ a $1{,}42$. Oczywiście można wyznaczyć jej położenie jeszcze dokładniej.

Istnienie dziur w zbiorze liczb wymiernych jest źródłem wielu kłopotów. Obrazowo można powiedzieć, że przez te dziury wycieka treść matematyczna wielu pięknych twierdzeń, zwłaszcza tych o bardziej subtelnej strukturze. Zbiór liczb wymiernych jest świetny do rachunków na liczbach konkretnych, ale zły dla wielu celów teoretycznych, dla bardziej skomplikowanych działań na liczbach, niż dodawanie, odejmowanie, mnożenie i dzielenie, zwłaszcza jeśli chce się wykonywać te działania w sposób dokładny, a nie przybliżony. Już pierwiastkowanie nie jest wykonalne w tym zbiorze. Spróbujcie określić tak pożyteczną funkcję jak $\log x$ ($x > 0$) tak, by zarówno x jak i $\log x$ były liczbami wymiernymi — nic z tego nie wyjdzie. W jednym i drugim przypadku czuje się po prostu brak liczb, zbiór liczb wymiernych jest za mały, by wykonywać w nim logarytmowanie lub pierwiastkowanie (dokładne, a nie przybliżone).

Matematyk bardzo nie lubi, gdy pewne działania, wyglądające na naturalne lub pożyteczne, są niewykonalne. W wielu przypadkach usuwa niewykonalność działań przez odpowiednie rozszerzenie zbioru przedmiotów, na których działania mają być wykonane, lub które mają być wynikiem tych działań. Można by przytoczyć wiele przykładów — nawet z najnowszej matematyki. Przytoczymy tu tylko jeden: rozszerzenie zbioru liczb wymiernych do zbioru liczb rzeczywistych.

Rozszerzenie to wykonuje się w sposób następujący. Przed każdą dziurą w zbiorze liczb wymiernych matematyk kładzie kołek do zatkania jej (liczbę wymierną wygodnie jest interpretować jako punkt na osi liczbowej; wówczas kołek do zabicia dziury też można wyobrażać sobie jako punkt na tej osi). Następnie jednym uderzeniem młotka matematyk wbija wszystkie kołki. Zwracam uwagę na fakt, że matematyk jednym aktem woli wbija od razu wszystkie kołki we wszystkie dziury! Nie należy wyobrażać sobie procesu wbijania w ten sposób, że najpierw numeruje wszystkie dziury liczbami naturalnymi, a potem chodzi kolejno od n-tej dziury do $n+1$-szej i zabija je kołkami. Takie postępowanie byłoby niemożliwe, można bowiem udowodnić, że dziur w zbiorze liczb wymiernych jest tak dużo, że nie można ich ponumerować wszystkimi liczbami naturalnymi.

Wszystkie liczby wymierne można ponumerować kolejnymi liczbami naturalnymi, ale dziur w tym zbiorze — nie! Dziwne, nieoczekiwane, ale prawdziwe. Jakkolwiek ponumerowalibyśmy te dziury wszystkimi liczbami naturalnymi, zawsze znalazłoby się jeszcze nieskończenie wiele nieponumerowanych dziur! Zawodowi matematycy mówią, że jakiś zbiór jest przeliczalny, jeśli wszystkie jego elementy można ponumerować kolejnymi różnymi liczbami naturalnymi, a jest nieprzeliczalny, jeśli tego nie można zrobić. Zbiory nieprzeliczalne są znacznie większe, znacznie bogatsze w elementy niż zbiory przeliczalne. Zbiór liczb wymiernych jest przeliczalny, a zbiór wszystkich dziur w tym zbiorze jest nieprzeliczalny. Widać stąd, że w zbiorze liczb wymiernych jest więcej dziur niż liczb! Czyż można mieć zaufanie do takiego zbioru? Nic dziwnego, że wiele treści matematycznej wycieka przezeń.



Powróćmy do rozszerzenia liczb wymiernych do rzeczywistych. Wbite kołeczki nazwiemy liczbami niewymiernymi, a całość, tzn. zarówno liczby wymierne jak i niewymierne nazwiemy liczbami rzeczywistymi zgodnie z powszechnie ustaloną terminologią. Czytelnik łatwo się domyśli, że kołeczek, który zatkał dziurę, podaną jako jedyny przykład ilustrujący to pojęcie, oznaczać będziemy symbolem $\sqrt{2}$.

Jak w każdej innej konstrukcji matematycznej, tak i w tym przypadku należy wyróżnić dwie strony tego samego zadania: 1) intuicyjne wyjaśnienie celu i metody konstrukcji oraz 2) precyzyjny opis jej wykonania z zachowaniem najwyższych kryteriów ścisłości współczesnej matematyki. Opisane powyżej wbijanie kołeczków w dziury to tylko intuicyjny opis konstrukcji, wyjaśnienie jej celu. Precyzyjny opis konstrukcji — to zupełnie inne zagadnienie. Zagadnienie — powiedziałbym — dosyć niewdzięczne. Znamy dwie metody „wbijania kołeczków", mianowicie metodę Dedekinda i metodę Cantora. Obydwie są bardzo precyzyjne i obydwie mają tę samą wielką wadę: zaciemniają mniej istotnymi szczegółami technicznymi podstawową, jasną i prostą intencję konstrukcji. Dlatego nie przytoczymy tu żadnej z nich. Wspomnimy tylko o zasadniczej różnicy między tymi metodami. Oczywiście kołeczki muszą być z czegoś zrobione, z jakiegoś tworzywa, naturalnie z jakiegoś abstrakcyjnego tworzywa pojęć matematycznych. Otóż metody Cantora i Dedekinda różnią się głównie materiałem, z którego zrobione są kołeczki. W metodzie Dedekinda kołeczkiem zatykającym dziurę jest sama dziura! Dziurę zatyka się nią samą! Można powiedzieć, że w metodzie tej koszty zużycia materiałów zostały doprowadzone do minimum, do zera!

Konstrukcja została wykonana, kołeczki są wbite. Pozostało nam sprawdzić, czy robota została rzetelnie wykonana, czy przypadkiem w trakcie wbijania nie powstały jakieś nowe dziury. Na szczęście wszystko jest w absolutnym porządku, zbiór liczb rzeczywistych jest całkowicie szczelny. Przytoczoną definicję dziury można wprawdzie sformułować w odniesieniu do liczb rzeczywistych, nie ma jednak potrzeby wprowadzania takiego pojęcia, po prostu w ogóle nie ma takich dziur.

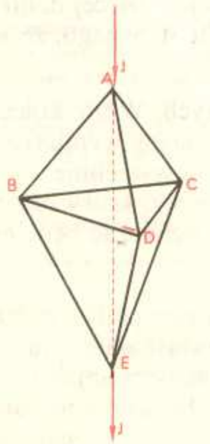
Okazuje się, że zbiór liczb rzeczywistych ma własności jeszcze lepsze, niż zbiór liczb wymiernych. Można ten zbiór uporządkować, można uogólnić podstawowe działania arytmetyczne, dodawanie, odejmowanie, mnożenie i dzielenie na liczby rzeczywiste, ale ponadto można w tym zbiorze wykonywać bez żadnych ograniczeń wiele innych pożytecznych operacji matematycznych, jak pierwiastkowanie, potęgowanie, logarytmowanie itp., których wykonalność w dziedzinie liczb wymiernych była mocno utrudniona, jeśli nie wręcz niemożliwa.

Okazało się ponadto, że w oparciu o pojęcie liczby rzeczywistej można zbudować całą analizę matematyczną, olbrzymią gałąź współczesnej matematyki. U podstaw wszystkich twierdzeń tej części matematyki leży „szczelność" zbioru liczb rzeczywistych (matematycy zawodowi używają przymiotnika „zupełny" zamiast „szczelny"). Twierdzenia analizy matematycznej przestają być prawdziwe, jeśli zbiór liczb rzeczywistych zastąpić przez zbiór liczb wymiernych. To właśnie mieliśmy na myśli, mówiąc żartobliwie o przeciekaniu wiedzy matematycznej przez dziury zbioru liczb wymiernych. Pojęcie liczby rzeczywistej jest niezbędne dla całej matematyki teoretycznej. Jest również niezbędne dla formowania ogólnych metod matematyki stosowanej aż do momentu, gdy w grę wchodzą przybliżone rachunki na konkretnych liczbach. Wtedy powracamy do bardziej elementarnych liczb wymiernych.

Niewątpliwie pojęcie liczby wymiernej jest prostsze niż pojęcie liczby rzeczywistej. Dla laika liczba rzeczywista, wprowadzona metodą Cantora lub Dedekinda, wydaje się być tworem dość mistycznym, wydaje się być znacznie mniej rzeczywistą — w potocznym znaczeniu tego słowa — niż liczba wymierna. Dla zawodowego matematyka liczba rzeczywista jest podstawowym narzędziem pracy, jest równie rzeczywista jak inne pojęcia matematyczne. Liczby rzeczywiste są równie rzeczywiste jak liczby wymierne, jedne i drugie są bowiem poprawnie zdefiniowanymi pojęciami istniejącymi w mózgu matematyka. Jedne i drugie mają ten sam typ realności.

Zadania

redaguje dr Jędrzej JĘDRZEJEWSKI



F1. Z prostych odcinków identycznego drutu oporowego zbudowano obwód elektryczny przedstawiony na rysunku. Prąd o natężeniu I dopływa do węzła A i wypływa z węzła E wzdłuż prostej AE, która jest prostopadła do płaszczyzny trójkąta równobocznego BCD utworzonego przez węzły B, C i D. Bryłę $ABCDE$ można uważać za dwa połączone podstawami ABC prawidłowe ostrosłupy trójkątne, każdy o innej wysokości. Wykazać, że w nieograniczonym ośrodku jednorodnym, w każdym punkcie odcinka AE wartość indukcji magnetycznej $\mathbf{B}$ wynosi zero. Rozwiązanie na str. 15.

redaguje mgr Andrzej MĄKOWSKI

M1. Udowodnić, że boki a, b, c trójkąta ABC spełniają równość $b^2 = a(a+c)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\sphericalangle ABC = 2\sphericalangle BAC$.
(z pracy D. Rameshwara Rao)
Rozwiązanie na str. 9.

M2. Znaleźć liczby rzeczywiste p i q, które są pierwiastkami równania $x^2+px+q = 0$ (ze względu na zmienną x).
(V. Gutenmacher) Rozwiązanie na str. 8.

M3. Dla jakich wartości rzeczywistych m układ równań

$$x^2+y^2 = m$$
$$-x^2+y = 2$$

ma dokładnie jedno rozwiązanie?
(R. Hajłasz) Rozwiązanie na str. 10.