Analiza, Dedekind i Cantor

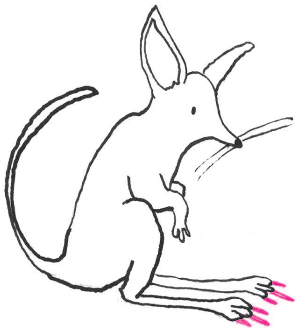
Sztuka w trzech aktach z prologiem i epilogiem

Piotr MANKIEWICZ

Delta **7/1977**

Prolog. *Rzecz dotyczy pytania: na ile Dedekind jest potrzebny Analizie?*

Akt I. *Zawiązanie akcji, czyli co to jest Analiza i co ma z tym wspólnego Dedekind; pojawienie się Cantora.*



Ciało $\mathbb{R}$ liczb rzeczywistych, które poznajemy (a raczej powinniśmy poznać) w szkole średniej, jest opisane pewnym układem aksjomatów. Aksjomaty te można podzielić na dwie klasy; pierwszą klasę stanowią wszystkie aksjomaty z wyjątkiem jednego – tzw. *Aksjomatu Dedekinda.* Aksjomaty pierwszej klasy mają charakter arytmetyczno-porządkowy. Mówią one m.in., że działania arytmetyczne na liczbach rzeczywistych są łączne, przemienne, że odejmowanie jest wykonalne zawsze, a dzielenie – tylko przez liczby różne od 0; że mnożenie jest rozdzielne względem dodawania; że dodawanie i mnożenie przez liczby dodatnie zachowują porządek (tzn. nierówności) itd. Cechą wspólną tych aksjomatów jest to, że mówią one o własnościach liczb rzeczywistych. Zupełnie inny charakter ma Aksjomat Dedekinda. Opisuje on pewną własność podzbiorów liczb rzeczywistych.

Mianowicie:

Kresem górnym zbioru A nazywamy taką najmniejszą liczbę rzeczywistą x, że dla każdego $a \in A$ zachodzi $a \leqslant x$. Kres górny zbioru A oznaczamy zwykle przez $\sup A$.

Aksjomat Dedekinda. *Każdy ograniczony podzbiór liczb rzeczywistych ma kres górny.*

Nieco trudniej jest powiedzieć, co to jest Analiza. Najlepsze określenie, jakie potrafię wymyślić, jest następujące: Analiza jest to zbiór twierdzeń, dających się wyprowadzić z aksjomatów ciała liczb rzeczywistych, opisujących pewne własności funkcji o wartościach rzeczywistych określonych na podzbiorach liczb rzeczywistych.

Najłatwiej wyjaśnić, o jakie własności tutaj chodzi, na przykładzie dwóch podstawowych twierdzeń Analizy.

Twierdzenie 1 (Darboux). *Jeżeli funkcja ciągła $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ przyjmuje na końcach przedziału $\langle a, b\rangle$ wartości różnych znaków, to wewnątrz przedziału istnieje taka liczba c, że $f(c) = 0$.*

Twierdzenie 2 (Lagrange). *Jeżeli funkcja ciągła $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ jest różniczkowalna wewnątrz przedziału $\langle a, b\rangle$, to wewnątrz tego przedziału istnieje taki punkt c, że $f(b) - f(a) = f'(c) \cdot (b - a)$.*

Zanotujmy jeszcze jedno twierdzenie Analizy.

Zbiór nieskończony A nazywa się przeliczalnym, jeżeli istnieje funkcja przekształcająca zbiór liczb naturalnych na ten zbiór.

Twierdzenie 3 (Cantor). *Ciało liczb rzeczywistych nie jest przeliczalne.*

Akt II. *Czy wszystkie liczby rzeczywiste są rzeczywiście potrzebne, czyli tragiczny koniec Analizy.*

Żeby zobaczyć, co się stanie z Analizą, kiedy zabraknie Aksjomatu Dedekinda, weźmy dowolne mniejsze podciało $\mathbb{P}$ ciała liczb rzeczywistych, tzn. taki zbiór liczb, w którym spełnione są wszystkie aksjomaty należące do pierwszej klasy. Ponieważ $\mathbb{P} \subset \mathbb{R}$, więc istnieje $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{P}$. Niech a i b będą takimi liczbami rzeczywistymi należącymi do $\mathbb{P}$, że $a < x_0 < b$ (takie liczby muszą istnieć!). Niech $A = \{x \in \mathbb{P} : a < x < x_0\}$. A jest zbiorem ograniczonym. W ciele $\mathbb{P}$ nie jest spełniony Aksjomat Dedekinda, gdyż z tego, że $\sup A = x_0$ i $x_0 \notin \mathbb{P}$, wynika, iż w ciele $\mathbb{P}$ zbiór A nie ma kresu górnego. Gdyby Twierdzenia Analizy nie zależały od Aksjomatu Dedekinda, tzn. dawały się wyprowadzić z aksjomatów należących do pierwszej klasy, to ponieważ $\mathbb{P}$ spełnia wszystkie aksjomaty należące do pierwszej klasy, byłyby one prawdziwe dla funkcji określonych na podzbiorach $\mathbb{P}$ o wartościach w $\mathbb{P}$. Tak jednak nie jest. Np. określmy funkcję $f : \langle a, b\rangle_{\mathbb{P}} \to \mathbb{P}$, gdzie $\langle a, b\rangle_{\mathbb{P}}$ oznacza odcinek domknięty w $\mathbb{P}$, tzn. $\langle a, b\rangle_{\mathbb{P}} = \{x \in \mathbb{P} : a \leqslant x \leqslant b\}$, wzorem

Przykład podciała, w którym nie każdy ograniczony podzbiór ma kres górny, tworzą liczby wymierne.

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{dla } a \leqslant x < x_0, \\ 1 & \text{dla } x_0 < x \leqslant b. \end{cases}$$

Łatwo można zauważyć, że spełnia ona założenia twierdzeń 1 i 2, natomiast tezy tych twierdzeń nie zachodzą. Z definicji f wynika, że $f(c) \neq 0$ dla każdego $c \in \langle a, b\rangle_{\mathbb{P}}$, także teza twierdzenia 2 nie może zachodzić, gdyż $f'(c) = 0$ dla każdego $c \in (a, b)$ i $f(b) - f(a) = 2$.

Ponieważ cała nasza konstrukcja wynikła z faktu, że istnieje $x_0 \notin \mathbb{P}$, z rozważań powyższych można wyciągnąć

Wniosek 1. *Każda liczba rzeczywista jest rzeczywiście potrzebna Analizie.*

Z drugiej strony można pokazać, że rezygnacja z Aksjomatu Dedekinda spowoduje nie tylko „zawalenie się” twierdzeń 1 i 2. Rezygnacja taka spowoduje tragiczny koniec Analizy – zawali się w niej praktycznie wszystko. Zostaną tylko nieciekawe ruiny.

Akt III. *Cudowne ocalenie Analizy, czyli liczby i funkcje definiowalne.*

Całe nieszczęście wyniknęło z tego, że chcieliśmy z jednej strony zmniejszyć zbiór liczb w Analizie, a z drugiej strony – pozostawić zbiór funkcji praktycznie bez zmian. Zawalenia się Analizy można uniknąć, jeżeli odpowiedniemu zmniejszeniu zbioru liczb towarzyszy odpowiednie zmniejszenie zbioru funkcji. Oto jeden z takich sposobów. Niech $\mathbb{D}$ będzie podzbiorem liczb rzeczywistych, złożonym z liczb definiowalnych za pomocą działań arytmetycznych, liczb naturalnych, zbioru liczb naturalnych, indukcji i kresu górnego (tzn. z liczb, które można „konkretnie" zdefiniować za pomocą tych pojęć).

Łatwo można wykazać, że $\mathbb{D}$ jest podciałem ciała liczb rzeczywistych. Np. żeby wykazać, że jeżeli $x \in \mathbb{D}$, to $z = 1/x \in \mathbb{D}$, wystarczy zauważyć, iż liczbę z można zdefiniować następująco:

„z jest jedyną liczbą, taką że $z \cdot x = 1$, gdzie x jest zdefiniowane przez …"

Każda z tych „konkretnych" definicji jest zdaniem zbudowanym ze skończonej ilości znaczków, a do dyspozycji mamy w ogóle skończoną ich ilość. Ciągów skończonych o wyrazach ze skończonego zbioru – a zatem i „konkretnych" definicji jest przeliczalna ilość.

Ponieważ zbiór wszystkich „konkretnych" definicji jest przeliczalny, zatem ciało $\mathbb{D}$ jest przeliczalne; a więc $\mathbb{D}$ jest istotnie mniejsze niż ciało liczb rzeczywistych (por. twierdzenie 3).

Umówmy się, że przez podzbiór ciała $\mathbb{D}$ będziemy rozumieli podzbiór $\mathbb{D}$ definiowalny za pomocą pojęcia „liczby definiowalne" i pojęć wymienionych wyżej. Można udowodnić, że dla ciała $\mathbb{D}$ i jego podzbiorów (definiowalnych) spełniony jest Aksjomat Dedekinda, tj. każdy ograniczony podzbiór definiowalny w $\mathbb{D}$ ma kres górny należący do $\mathbb{D}$.

Wniosek 2. *Ciało $\mathbb{D}$ spełnia wszystkie aksjomaty ciała liczb rzeczywistych* (przy interpretacji: podzbiór = podzbiór definiowalny).

Rozważmy wszystkie funkcje definiowalne z $\mathbb{R}$ w $\mathbb{R}$.

Twierdzenie 4. *Każda funkcja definiowalna przeprowadza liczby definiowalne w liczby definiowalne.*

Dowód. Jeżeli x jest liczbą definiowalną, a f jest funkcją definiowalną, to definicja $z = f(x)$ wygląda następująco:

„z jest jedyną liczbą rzeczywistą, taką że $z = f(x)$, gdzie f jest zdefiniowane przez …, a x jest zdefiniowane przez …".

Zatem jeżeli ograniczymy się do liczb, podzbiorów i funkcji definiowalnych, to w otrzymanym modelu spełnione będą wszystkie aksjomaty ciała liczb rzeczywistych, a więc prawdziwe będą wszystkie twierdzenia Analizy (bo można je z tych aksjomatów wyprowadzić). Nazwijmy sobie tę teorię Analizą Definiowalną.

Wniosek 3. *Mimo zmniejszenia ciała liczb rzeczywistych Analizę udało się jednak uratować.*

Zbiór funkcji w Analizie Definiowalnej jest wystarczająco obszerny. Funkcji tych wystarczy inżynierom, by mogli budować domy, mosty, a nawet pojazdy kosmiczne. Wystarczy ich także matematykom. Tak naprawdę to funkcji tych wystarczy wszystkim. Nikt z nas nie ma żadnej szansy spotkać się z funkcją niedefiniowalną w praktyce. Dlaczego?

Wniosek 4. *W obrębie Analizy Definiowalnej wszystkie twierdzenia Analizy są prawdziwe przy następującej interpretacji*:

liczby rzeczywiste	–	*liczby rzeczywiste definiowalne*
podzbiory liczb rzeczywistych	–	*definiowalne podzbiory liczb definiowalnych*
funkcje	–	*funkcje definiowalne*
itd …		

W szczególności, w obrębie Analizy Definiowalnej prawdziwe jest twierdzenie 3 (porównaj definicję zbioru przeliczalnego). To znaczy, że zachodzi

Twierdzenie 5 (Cantora dla Analizy Definiowalnej). *Ciało $\mathbb{D}$ nie jest przeliczalne.*

Epilog. *Zaskakujące konsekwencje, czyli jak przeliczalność zbioru (i nie tylko ona) może zależeć od naszego obrazu świata.*

Na początku aktu III stwierdziliśmy, że ciało $\mathbb{D}$ jest przeliczalne, na końcu zaś tego samego aktu podaliśmy twierdzenie Cantora mówiące, że ciało $\mathbb{D}$ nie jest przeliczalne. Sprzeczność! Chcieliśmy ocalić Analizę, a w efekcie utopiliśmy Matematykę. Sprawa domaga się wyjaśnienia!

Wyjaśnienie takie jest stosunkowo proste. To, czy pewien zbiór A jest przeliczalny, czy nie, nie jest własnością absolutną tego zbioru. Może to w pewnych przypadkach zależeć od przyjętego obrazu (modelu) „świata". Mianowicie, w naszym przykładzie

1° w przypadku Analizy model zawierał dużo elementów i dużo funkcji – a więc nic dziwnego, że wśród nich znalazła się funkcja f odwzorowująca zbiór liczb naturalnych na zbiór $\mathbb{D}$, co spowodowało, że zbiór $\mathbb{D}$ z punktu widzenia Analizy jest przeliczalny (porównaj definicję zbioru przeliczalnego),

2° w przypadku Analizy Definiowalnej model zawierał mniej elementów i mniej funkcji; twierdzenie Cantora dla Analizy Definiowalnej orzeka, iż tych funkcji jest tak mało, że nie znajduje się wśród nich żadna funkcja odwzorowująca liczby naturalne na $\mathbb{D}$.

Ponieważ dodawanie jest „efektywnie" wykonalne, więc w każdym modelu analizy $2 + 2$ musi się równać 4. Natomiast przeliczalność zbioru nie jest efektywnie sprawdzalna. To znaczy – nie istnieje skończony algorytm pozwalający rozstrzygnąć, czy dany zbiór jest przeliczalny, czy nie. Zdarza się, że w przypadku takich nieefektywnych pojęć odpowiedź na pytanie zależy od przyjętego modelu świata. I tak właśnie jest z przeliczalnością zbioru $\mathbb{D}$. Podobnie nieefektywnym postulatem jest używany w Geometrii Aksjomat Archimedesa:

Odkładając wielokrotnie na prostej dany odcinek a, możemy uzyskać odcinek większy od danego odcinka b.

I w tym przypadku odpowiedź na pytanie, czy tak jest naprawdę, zależy od przyjętego modelu Geometrii.