Konstrukcja, która zmieniła definicję krzywej

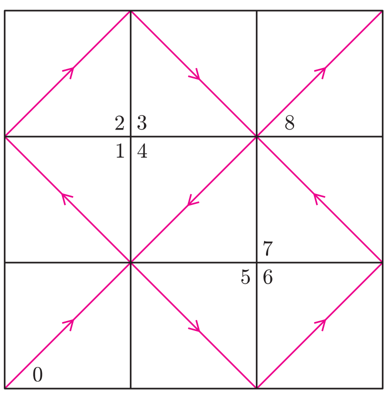
Marta SZUMAŃSKA[*]

Na nieskończoności opierają się konstrukcje większości obiektów analizy matematycznej, choć często w niejawny sposób. Przyjrzyjmy się choćby ciągłości – pojęciu na pierwszy rzut oka z nieskończonością niezwiązanemu. Można powiedzieć, że funkcja jest ciągła, jeśli „nie rozrywa” dziedziny. Jednak gdy chcemy ciągłość wyrazić precyzyjnie, chętnie sięgniemy do szufladki z nieskończonością, by posłużyć się pojęciem zbieżności i podać definicję: *funkcja* $f : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ *jest ciągła w punkcie* $t \in [0,1]$, *jeśli* $\lim_{n\to\infty} f(t_n) = f(t)$ *dla każdego ciągu* (t_n) *o wyrazach w* $[0,1]$ *zbieżnego do* t.

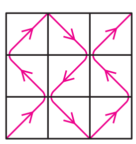
Ciąg punktów na płaszczyźnie (x_n) jest zbieżny do x wtedy i tylko wtedy, gdy ciąg ich odległości od x, $d(x_n, x)$ jest zbieżny do zera.

Powyższy przykład pokazuje, że nieskończoność może być użytecznym narzędziem przy budowaniu ścisłych definicji opartych na mniej precyzyjnych intuicjach. Czasem jednak, przez nieskończoność właśnie, rozsądna, zdawałoby się, definicja może okazać się nieodpowiednia.

Spróbujmy zdefiniować krzywą na płaszczyźnie. Definicja powinna obejmować np. wykres funkcji kwadratowej, łamaną, czy tor ruchu punktu materialnego. Chcielibyśmy, by krzywa była obiektem ciągłym i jednowymiarowym, zatem naturalnie byłoby przyjąć, że *krzywa to ciągły obraz odcinka.* Taką też definicję zaproponował w XIX wieku Camille Jordan. Okazuje się jednak, że tak opisana klasa nie do końca odpowiada intuicjom związanym z pojęciem krzywej, gdyż należy do niej obiekt o dodatnim polu – istnieje bowiem funkcja ciągła, która przekształca odcinek $[0,1]$ na kwadrat. Przykład takiej funkcji jako pierwszy podał Peano w 1890 roku.

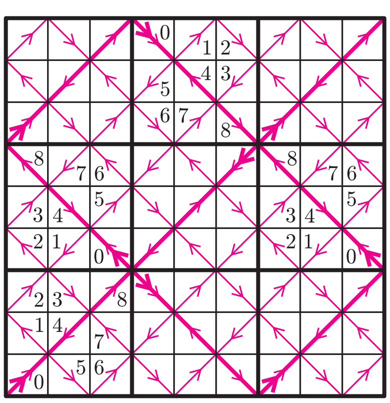


Rys. 1. Łamana l_1 i kwadraty pierwszego podziału; poniżej krzywa odwiedzająca kwadraty w tej samej kolejności co l_1.



Jak skonstruować taką nietypową „krzywą”? Należy odpowiednio dobrać nieskończony ciąg funkcji ciągłych określonych na $[0,1]$. Obraz każdej z funkcji w ciągu jest łamaną o skończonej liczbie odcinków, jednak dopuszczenie do konstrukcji nieskończoności pod postacią przejścia granicznego prowadzi do funkcji, której obrazem jest pełen kwadrat.

Przyjrzyjmy się dokładniej konstrukcji odpowiedniego ciągu funkcyjnego. Niech K będzie kwadratem o boku 1. Kwadrat K dzielimy na 9 przystających kwadratów, które numerujemy od 0 do 8 (kwadrat o numerze i oznaczamy K_i), następnie tworzymy łamaną l_1, której odcinkami są wybrane przekątne kolejnych kwadratów (patrz rys. 1). Funkcja $f_1 : [0,1] \to K$ opisuje położenie w chwili t punktu poruszającego się po łamanej zgodnie z zadanym przez strzałki na rysunku kierunkiem i stałą prędkością równą $3\sqrt{2}$. Zanotujmy jeszcze, że gdy $t \in \left[\frac{i}{9}, \frac{i+1}{9}\right]$, to $f_1(t)$ znajduje się w kwadracie K_i.

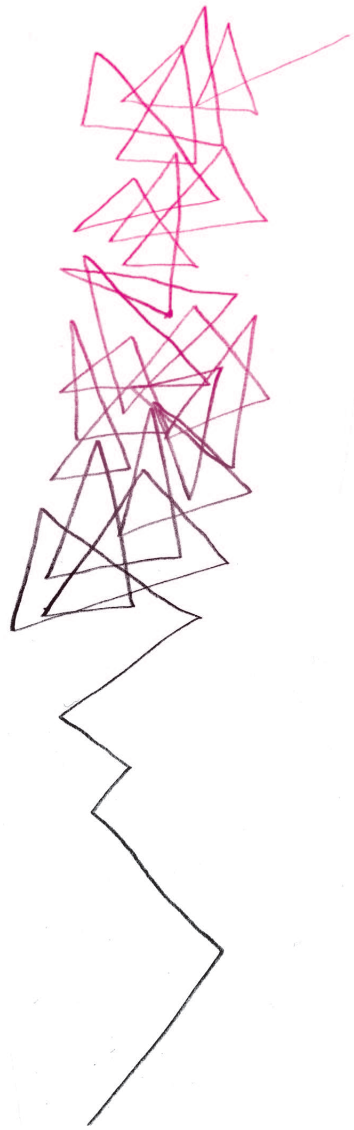


Rys. 2. Łamana l_2 i kwadraty drugiego podziału.

Aby skonstruować łamaną l_2, zastąpimy każdy z odcinków łamanej l_1 jej trzykrotnie pomniejszoną kopią, w taki sposób, by początek pomniejszonej łamanej pokrywał się z początkiem zastępowanego odcinka (rys. 2). Następny wyraz naszego ciągu, funkcja $f_2 : [0,1] \to K$, opisuje położenie punktu poruszającego się po krzywej l_2 z prędkością $9\sqrt{2}$ zgodnie z kierunkiem wskazanym przez strzałki na rysunku 2. Przyjmijmy, że wraz z łamaną l_1 takim samym operacjom (pomniejszenia i odpowiedniego wklejania) podlega cały rysunek 1. Otrzymujemy w ten sposób rodzinę 81 kwadratów o boku 1/9, przy czym każdemu z nich przypisana jest pewna liczba $i_2 \in \{0,1,2,\ldots,8\}$. Każdemu z kwadratów nadajemy unikalny „numer katalogowy” złożony z dwóch liczb umożliwiających jego odnalezienie: pierwsza liczba jest równa i_1, jeśli kwadrat znajduje się w kwadracie K_{i_1}, zaś druga, i_2, to wspomniana wcześniej liczba przypisana kwadratowi w wyniku konstrukcji. Kwadrat o numerze i_1, i_2 będziemy oznaczać przez K_{i_1,i_2}. Podobnie jak w pierwszym kroku, obserwujemy, że jeśli $t \in \left[\frac{i_1}{9} + \frac{i_2}{9^2}, \frac{i_1}{9} + \frac{i_2+1}{9^2}\right]$, to $f_2(t)$ zawarte jest w kwadracie $K_{i_1,i_2} \subset K_{i_1}$.

Kolejne łamane i funkcje generujemy, powtarzając powyższe operacje. Łamana l_3 powstaje w wyniku trzykrotnego pomniejszenia łamanej l_2 i zastąpienia nią w opisany uprzednio sposób wszystkich odcinków wyjściowej krzywej l_1.

[*]Instytut Matematyki, Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski



Dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ funkcja $f_n : [0,1] \to K$ opisuje położenie punktu poruszającego się z prędkością $3^n\sqrt{2}$ po łamanej l_n powstałej przez zastąpienie odcinków łamanej l_1 trzykrotnie pomniejszonymi kopiami łamanej l_{n-1}.

W każdym kroku konstrukcji otrzymujemy również rodzinę coraz drobniejszych kwadratów, którym przypisujemy odpowiednie numery katalogowe. W n-tym kroku konstrukcji dostajemy 9^n kwadratów o boku 3^{-n}, których numer katalogowy składa się z n cyfr ze zbioru $\{0, 1, \ldots, 8\}$. Kwadrat o numerze $i_1, i_2, \ldots, i_n$ łatwo odnaleźć – wybieramy kwadrat pierwszego podziału o numerze i_1, wewnątrz którego znajdujemy kwadrat drugiego podziału z numerem i_2 i tak dalej – z każdym kolejnym indeksem zawężając obszar poszukiwań, by w n-tym kroku dotrzeć do odpowiedniego kwadratu n-tego podziału.

Warto zauważyć, że

$$\text{jeśli } t \in \left[\frac{i_1}{9} + \frac{i_2}{9^2} + \ldots + \frac{i_n}{9^n}, \frac{i_1}{9} + \frac{i_2}{9^2} + \ldots + \frac{i_n+1}{9^n}\right], \text{ to } f_n(t) \in K_{i_1,i_2,\ldots,i_n},$$

skąd można wywnioskować, że $f_k(t) \in K_{i_1,i_2,\ldots,i_n}$ dla wszystkich $k > n$.

Wykażemy, że tak skonstruowany ciąg funkcyjny jest zbieżny, funkcja $x(t) := \lim_{n\to\infty} f_n(t)$ ciągła, a każdy punkt kwadratu jest postaci $x(t)$. Zacznijmy od dowodu tej ostatniej własności. Zauważmy, że każdy $x \in K$ możemy opisać (niejednoznacznie) jako przecięcie pewnej nieskończonej rodziny kwadratów powstałych w kolejnych krokach konstrukcji. Zatem każdemu punktowi x możemy przypisać nieskończony numer katalogowy $i_1, i_2, \ldots, i_n, \ldots$; wówczas $x \in K_{i_1,i_2,\ldots,i_k}$ dla każdego $k \in \mathbb{N}$. Niech

$$t = \frac{i_1}{9} + \frac{i_2}{9^2} + \ldots + \frac{i_n}{9^n} + \ldots,$$

co oznacza, że następujące po przecinku cyfry rozwinięcia t w systemie dziewiątkowym to $i_1, i_2, \ldots, i_n, \ldots$. Pokażemy, że $f_n(t)$ zbiega do punktu x. Ponieważ $t \in \left[\frac{i_1}{9}, \frac{i_1+1}{9}\right]$, to dla $n \geqslant 1$, $f_n(t) \in K_{i_1}$; analogicznie, ponieważ $t \in \left[\frac{i_1}{9} + \frac{i_2}{9^2}, \frac{i_1}{9} + \frac{i_2+1}{9^2}\right]$, to dla $n \geqslant 2$, $f_n(t) \in K_{i_1,i_2}$, i ogólnie, jeśli $n \geqslant k$, to $f_n(t) \in K_{i_1,i_2,\ldots,i_k}$. Zatem dla dowolnego $k \in \mathbb{N}$, dla $n \geqslant k$, $f_n(t)$ i x należą do tego samego kwadratu k-tego podziału, czyli ich odległość $d(f_n(t), x) \leqslant 3^{-k}\sqrt{2}$. To dowodzi żądanej zbieżności.

W razie potrzeby skończone rozwinięcie uzupełniamy zerami lub ostatnią niezerową cyfrę rozwinięcia zmniejszamy o jeden i dopisujemy nieskończenie wiele cyfr 8.

Powyższe rozumowanie dowodzi zbieżności ciągu $f_n(t)$ tylko dla wybranych t. Aby wykazać ją dla wszystkich $t \in [0,1]$, wystarczy zauważyć, że każdą liczbę można wyrazić w systemie dziewiątkowym, zatem każdemu $t \in [0,1]$ możemy przypisać punkt $x(t) \in K$ o nieskończonym indeksie odpowiadającym rozwinięciu dziewiątkowemu t. Powtarzając poprzednie rozumowanie, stwierdzamy, że $\lim_{n\to\infty} f_n(t) = x(t)$. Pozostaje wykazać ciągłość funkcji $x(t)$.

Czytelnik, któremu znane jest pojęcie zbieżności jednostajnej, z łatwością zauważy, że rozumowanie, które przeprowadziliśmy, dowodzi zbieżności jednostajnej ciągu f_n, skąd, dzięki ciągłości funkcji f_n, wynika ciągłość funkcji granicznej x.

Zauważmy, że dzięki ciągłości każdej z funkcji f_n, dla $m \in \{1, 2, \ldots, 9^n - 1\}$ obraz przedziału $\left[\frac{m-1}{9^n}, \frac{m+1}{9^n}\right]$ należy do dwóch sąsiadujących kwadratów n-tego podziału. Z wcześniejszych obserwacji wynika, że jeśli $f_n(t)$ należy do pewnego kwadratu n-tego podziału, to $x(t)$ również. Weźmy teraz dowolny ciąg (t_k) zbieżny do t. Jeśli $t \in \left(\frac{m-1}{9^n}, \frac{m+1}{9^n}\right)$, to począwszy od pewnego k – oznaczmy je przez k_n – wszystkie wyrazy ciągu (t_k) również należą do tego przedziału, zatem dla $k \geqslant k_n$ wszystkie wyrazy ciągu $x(t_k)$ należą do dwóch sąsiadujących kwadratów n-tego podziału, przy czym do jednego z nich należy również $x(t)$. Oznacza to, że dla $k > k_n$ odległość $d(x(t_k), x(t)) \leqslant 2 \cdot 3^{-n}\sqrt{2}$, zatem $\lim_{k\to\infty} x(t_k) = x(t)$, czyli funkcja $x : [0,1] \to K$ jest ciągła.

Istnienie krzywych wypełniających kwadrat spowodowało konieczność poszukiwania przez matematyków innych definicji krzywych, lepiej oddających intuicje. Jedną z dróg prowadzących do celu jest zabezpieczenie się przed zgubnymi efektami działania nieskończoności – można zastrzec, by krzywa miała skończoną długość, żądając, by funkcja z pierwotnej definicji była nie tylko ciągła, ale by nie pozwoliła na zbyt szybkie rozciąganie odcinka $[0,1]$, czyli była np. funkcją o ciągłej pochodnej.