$\pi^e < e^\pi$

Jarosław GÓRNICKI[*]

Gdy poznajemy matematykę, liczby oznaczane symbolami e oraz π pojawiają się bardzo często. Uznając ważność tych liczb, badamy ich arytmetyczną naturę. Wiemy, że e jest liczbą niewymierną (L. Euler, 1737 r.) oraz π jest liczbą niewymierną (J.H. Lambert, 1767 r.). Przestępność liczby e wykazał Ch. Hermite w 1873 r., a przestępność liczby π wykazał w 1882 r. F. Lindemann. Wyznaczenie dobrych przybliżeń wartości tych liczb nie jest zadaniem banalnym. Przypomnijmy, jak można to zrobić.

Obliczamy e. Liczbę e definiujemy wzorem Newtona z 1665 r.

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}. \tag{1}$$

Określenie to jest poprawne, gdyż ciąg sum częściowych
$$x_k = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{k!}$$
jest rosnący i ograniczony z góry przez $1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots = 3$, więc zbieżny.

Definicja (1) pozwala na obliczenie wartości liczby e z dużą dokładnością. Zauważmy, że dla $n \geqslant m+1$ zachodzi nierówność
$$\frac{1}{n!} < \frac{1}{(m+1)!(m+1)^{n-(m+1)}},$$
więc możemy oszacować resztę szeregu:
$$\sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{1}{n!} < \frac{1}{(m+1)!} \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{1}{(m+1)^{n-(m+1)}} = \frac{1}{(m+1)!} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{m+1}} = \frac{1}{m \cdot m!},$$
a stąd
$$0 < e - \sum_{n=0}^{m} \frac{1}{n!} < \frac{1}{m \cdot m!}.$$

Spróbujmy obliczyć wartość liczby e z sześcioma cyframi dokładnymi po przecinku, czyli wyznaczmy jej przybliżenie z dokładnością do $\frac{1}{10^7}$. W tym celu możemy wziąć $m = 10$, bo wówczas błąd nie przekracza $\frac{1}{10! \cdot 10} < \frac{3}{10^8} < \frac{1}{10^7}$. Jeśli w wyrażeniu $x_{10} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{10!}$ pozostawimy bez zmian pierwsze trzy składniki, a każdy z pozostałych ułamków zastąpimy zaokrągleniem na ósmym miejscu po przecinku, to sumaryczny błąd nie będzie większy niż $0{,}5 \cdot \frac{1}{10^8} \cdot 8 = 4 \cdot \frac{1}{10^8}$. W ten sposób otrzymujemy $e = 2{,}718281\ldots$, przy czym wszystkie wypisane cyfry są poprawne.

Obliczamy π. Liczbę π definiujemy wzorem Leibniza z 1673 r. (wzór ten był znany J. Gregory'emu dwa lata wcześniej):

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}. \tag{2}$$

Uzasadnienie wzoru (2) nie jest trudne, gdy znamy podstawy rachunku różniczkowego i całkowego. Punktem wyjścia jest równość ($n = 2k+1$)
$$\frac{1}{1+x^2} = (1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots \ldots + x^{2n-2} - x^{2n}) + \frac{x^{2n+2}}{1+x^2}.$$
Całkując obie strony, otrzymujemy
$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots \ldots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} + \int_0^1 \frac{x^{2n+2}}{1+x^2}\mathrm{d}x$$
i korzystamy z równości
$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$$
oraz oszacowania
$$\int_0^1 \frac{x^{2n+2}}{1+x^2}\mathrm{d}x < \int_0^1 x^{2n+2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2n+3},$$
przechodząc z n do nieskończoności.

Definicja Leibniza ma poważną wadę – praktycznie nie nadaje się do wyznaczania dokładnej wartości liczby π, ponieważ szereg jest zbyt wolno zbieżny. Wyznaczanie wartości π ze wzoru (2) z dokładnością do trzech miejsc po przecinku wymaga obliczenia sumy aż 10 000 kolejnych składników. Skorzystamy więc z rozwinięcia Gregory'ego:
$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} \quad \text{dla } |x| \leqslant 1,$$
w którym zbieżność sumy jest tym szybsza, im bliżej zera wybierzemy punkt x. Wykorzystał to J. Machin w 1706 r., proponując bardzo sprytną metodę obliczenia wartości π z dużą dokładnością. Oto metoda Machina.

Niech $A = \operatorname{arctg} \frac{1}{5}$, wtedy $0 < A < \frac{\pi}{4}$ i $\operatorname{tg} A = \frac{1}{5}$. Następnie obliczamy:
$$\operatorname{tg} 2A = \frac{2 \operatorname{tg} A}{1 - \operatorname{tg}^2 A} = \frac{5}{12} \quad \text{i} \quad \operatorname{tg} 4A = \operatorname{tg} 2(2A) = \frac{120}{119}.$$
Ponieważ liczba $\frac{120}{119}$ jest bliska jedności, więc kąt $4A$ jest bliski $\frac{\pi}{4}$. Niech $B = 4A - \frac{\pi}{4}$. Wówczas $-\frac{\pi}{4} < B < \frac{3}{4}\pi$, a ponieważ
$$\operatorname{tg} B = \operatorname{tg}\left(4A - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\operatorname{tg} 4A - 1}{1 + \operatorname{tg} 4A} = \frac{1}{239} > 0,$$

[*]Katedra Matematyki, Politechnika Rzeszowska

więc $0 < B < \frac{\pi}{2}$ i $B = \operatorname{arctg} \frac{1}{239}$. Stąd otrzymujemy *wzór Machina*:

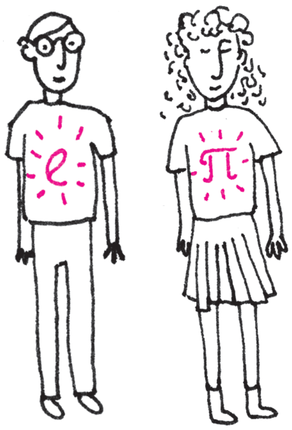
$$\pi = 4(4A - B) = 16 \cdot \operatorname{arctg} \frac{1}{5} - 4 \cdot \operatorname{arctg} \frac{1}{239} = $$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 16}{(2n+1) \cdot 5^{2n+1}} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 4}{(2n+1) \cdot 239^{2n+1}}.$$

Wystarczy teraz obliczyć kilka początkowych wyrazów pierwszego i drugiego szeregu, aby otrzymać dość dokładną wartość liczby π.

Przez s_k i t_k, dla $k \geqslant 0$, oznaczmy odpowiednio k-tą sumę częściową pierwszego i drugiego szeregu we wzorze Machina, a przez s i t sumy tych szeregów (które istnieją i są skończone, co wynika np. z kryterium Leibniza). Ponieważ $s_{2k+1} < s < s_{2k}$ oraz $t_{2k+1} < t < t_{2k}$, więc zachodzą nierówności $0 < s - s_3 < s_4 - s_3 = \frac{16}{9 \cdot 5^9} < \frac{1}{10^6}$ i $0 < t - t_1 < t_2 - t_1 = \frac{4}{5 \cdot 239^5} < \frac{2}{10^{12}}$. Stąd otrzymujemy następujące oszacowanie:

$$-\frac{2}{10^{12}} < (s - s_3) - (t - t_1) = \pi - (s_3 - t_1) < \frac{1}{10^6}.$$

Wynika z niego, że jeśli dodamy składniki sum częściowych w wyrażeniu $s_3 - t_1$, zaokrąglone na ósmym miejscu po przecinku, to otrzymamy przybliżenie liczby π z poprawnymi początkowymi pięcioma cyframi rozwinięcia dziesiętnego: $\pi = 3{,}14159\ldots$



Jeśli znamy rozwinięcie e^x w szereg potęgowy

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \ldots,$$

to oczywiście wiemy, że $e^x > 1 + x$ dla $x > 0$, ale, jak widać, można to udowodnić bardziej elementarnie.

Dowody nierówności. Możemy teraz przystąpić do wykazania tytułowej nierówności, co zrobimy pięcioma sposobami.

Sposób I. Rozważmy funkcję $f(x) = \frac{e^x}{x^e}$ dla $x > 0$. Ponieważ

$$f'(x) = \frac{e^x \cdot x^e - e^x \cdot ex^{e-1}}{(x^e)^2} = \frac{x^{e-1} \cdot e^x \cdot (x - e)}{(x^e)^2},$$

więc $f'(e) = 0$, $f'(x) < 0$ dla $0 < x < e$ i $f'(x) > 0$ dla $x > e$. W punkcie $x = e$ funkcja f osiąga minimum i, podstawiając $x = \pi$, otrzymujemy nierówność $f(\pi) = \frac{e^\pi}{\pi^e} > f(e) = 1$.

Sposób II. Udowodnimy pomocniczą nierówność $e^x > 1 + x$ dla $x > 0$. Niech $f(x) = e^x$ i $g(x) = 1 + x$ dla $x \geqslant 0$. Wówczas $f(0) = g(0)$ i $f'(x) > g'(x)$ dla $x > 0$. Rozważmy funkcję $F(t) = f(t) - g(t)$ określoną na dowolnym przedziale $[0, x]$, gdzie $x > 0$. Z twierdzenia Lagrange'a o wartości średniej istnieje takie $\xi \in (0, x)$, że $F(x) - F(0) = F'(\xi)(x - 0)$. Stąd $F(x) = F'(\xi)x = (f'(\xi) - g'(\xi))x > 0$, czyli dla dowolnej wartości $x > 0$

$$e^x = f(x) > g(x) = 1 + x.$$

Podstawiając $x = \frac{\pi}{e} - 1$ do powyższej nierówności, otrzymujemy $e^{\frac{\pi}{e} - 1} > 1 + \left(\frac{\pi}{e} - 1\right)$, a stąd $\frac{e^{\frac{\pi}{e}}}{e} > \frac{\pi}{e}$ i ostatecznie $e^\pi > \pi^e$.

Sposób III. Rozważmy funkcję $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$ dla $x > 0$. Ponieważ $f'(x) = x^{\frac{1}{x} - 2} \cdot (1 - \ln x)$, więc $f'(e) = 0$, $f'(x) > 0$ dla $0 < x < e$ oraz $f'(x) < 0$ dla $x > e$. W punkcie $x = e$ funkcja f osiąga maksimum. Zatem $f(\pi) < f(e)$, czyli $\pi^{\frac{1}{\pi}} < e^{\frac{1}{e}}$, a stąd otrzymujemy wyjściową nierówność.

Sposób IV. Niech $f(x) = \ln x - \frac{x}{e}$, $x > 0$. Ponieważ $f'(x) = \frac{e - x}{e \cdot x}$, więc łatwo sprawdzić, że w punkcie $x = e$ funkcja f osiąga maksimum. Zatem dla $x = \pi$ otrzymujemy $e \ln \pi < \pi$. Ponieważ e^x jest funkcją rosnącą, więc $e^{e \ln \pi} < e^\pi$, co kończy dowód.

Sposób V. Tym razem rozpatrzmy funkcję $f(x) = e^{1 + \frac{x}{e}} - (x + e)$ dla $x \in \mathbb{R}$. Ponieważ $f'(x) = e^{\frac{x}{e}} - 1$, więc f ma minimum w $x = 0$. Stąd dla $x \neq 0$ mamy nierówność $e^{1 + \frac{x}{e}} > x + e$. Dla $x > 0$ wynika z niej $e^{e + x} > (e + x)^e$. Wystarczy teraz podstawić $x = \pi - e$.

Na zakończenie odnotujmy, że obliczenia komputerowe dają przybliżone wartości $e^\pi \approx 23{,}140692$ i $\pi^e \approx 22{,}459157$. W 1929 r. A. Gelfond wykazał, że liczba e^π jest przestępna. Natomiast natura arytmetyczna liczby π^e jest dotychczas nieznana.

Rozwiązanie zadania M 1327.
Jeśli pewne trzy spośród rozważanych pięciu liczb dają tę samą resztę z dzielenia przez 3, to wybieramy je i ich suma jest podzielna przez 3. W przeciwnym przypadku pewne trzy liczby dają parami różne reszty z dzielenia przez 3 – te właśnie wybieramy.