

Zadanie 768 – uwagi

Piotr KUMOR

Zadanie M 768. Znaleźć wszystkie trójki liczb naturalnych $k, m, x \geq 1$, spełniające równanie

$$1 + x + x^2 + \dots + x^k = (1 + x)^m. \quad (1)$$

Chciałbym przedstawić kilka uwag dotyczących tego zadania.

Równanie (1) jest szczególnym przypadkiem sławnego równania Nagella–Ljunggrena (zwanego dalej równaniem NL), czyli równania diofantycznego:

$$\frac{x^n - 1}{x - 1} = y^q \quad \text{w liczbach całkowitych } x > 1, y > 1, n > 2, q \geq 2. \quad (2)$$

Znane są trzy rozwiązania tego równania:

$$\frac{3^5 - 1}{3 - 1} = 11^2, \quad \frac{7^4 - 1}{7 - 1} = 20^2, \quad \frac{18^3 - 1}{18 - 1} = 7^3 \quad (3)$$

oraz hipoteza, że nie ma innych rozwiązań.

Jest to wciąż (listopad 2018) hipoteza, jednak na temat równania NL udowodniono niemało. Powołując się na pewne takie wyniki, podamy poniżej trzy fakty, z których każdy jest znacznie mocniejszy niż nasze twierdzenie.

Fakt 1. Równanie NL nie ma rozwiązań takich, że $y \equiv 1 \pmod{x}$.

Nawet nieco więcej mówi Twierdzenie 1, udowodnione w pracy [Bugeaud et al. \[2000\]](#).

Fakt 2. Jeżeli liczby x, y spełniają równanie NL, to liczby y i $1 + x$ są względnie pierwsze. Z jednym tylko wyjątkiem, przypadkiem równania NL, gdy: $n = 4, q = 2, x = 7, y = 20$.

Jeżeli bowiem liczby y i $1 + x$ nie są względnie pierwsze, a równanie NL jest spełnione, to liczba n jest parzysta. Wiadomo natomiast, że jedynym rozwiązaniem równania NL z parzystym n jest właśnie to podane wyżej. W źródłach jest podane, że dla n podzielnych przez cztery dowód był znany już dawno, [Ljunggren \[1943\]](#). Gdy zaś n jest liczbą parzystą, niepodzielną przez cztery, wynika to prawie natychmiast z twierdzenia, które potwierdza sławną hipotezę Catalana (osiem i dziewięć to jedyne nietrywialnie potęgi różniące się o jeden). To udowodnione ostatecznie dopiero w XXI wieku twierdzenie jest tak znane, że rezygnujemy tu z podawania źródeł.) Mamy mianowicie:

$$(3) \quad \frac{x^m - 1}{x - 1} \cdot (x^m + 1) = y^q.$$

Clearly, the greatest common divisor of $x^m - 1$ and $x^m + 1$ is at most 2, and is 2 only if x is odd. But in this case $(x^m - 1)/(x - 1)$ is odd, and the two factors in the left-hand side of (3) are coprime. Consequently, $x^m + 1$ is a q -th power in any case. By the proof of Catalan's Conjecture [9], this never happens.

Według Twierdzenia 1 z pracy [Bugeaud and Mihăilescu \[2007\]](#), jeżeli istnieje rozwiązanie równania NL różne od tych trzech znanych, to najmniejszy dzielnik pierwszy liczby n jest równy co najmniej 29.

Fakt 3. Równanie $\frac{x^n-1}{x-1} = (1+x)y^q$ nie ma rozwiązań w liczbach całkowitych $n, q, x, y \geq 2$.

Nie jest to równanie NL, ale (jak się okazuje) sprowadza się do takiego. Gdyby bowiem istniało rozwiązanie, to n jest liczbą parzystą, więc $x^n - 1$ dzieli się przez $x^2 - 1$, skąd wynika, że pewne równanie NL ma rozwiązanie, gdy x (w tym równaniu NL) jest kwadratem liczby całkowitej. To ostatnie jest jednak niemożliwe, co udowodniono w pracy [Bugeaud \[1999\]](#).

Literatura

- M.; Roy Y.; Shorey T. N. Bugeaud, Y.; Mignotte. The equation $(x^n - 1)/(x - 1) = y^q$ has no solution with x square. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 127:353–372, 1999. ISSN 0305-0041,1469-8064.
- Y. Bugeaud and P. Mihăilescu. On the Nagell-Ljunggren equation $(x^n - 1)/(x - 1) = y^q$. *Mathematica Scandinavica*, pages 177–183, 2007.
- Y. Bugeaud, M. Mignotte, and Y. Roy. On the diophantine equation $(x^n - 1)/(x - 1) = y^q$. *Pacific Journal of Mathematics*, 193(2):257–268, 2000.
- W. Ljunggren. Noen setninger om ubestemte likninger av formen $(x^n - 1)/(x - 1) = y^q$. *Norsk. Mat. Tidsskr*, 25(1):17–20, 1943.