



U(nie)jednorodnianie nierówności

Bartłomiej BZDEGA

W całym artykule stosujemy oznaczenia $X = (x_1, \dots, x_n)$ oraz $aX = (ax_1, ax_2, \dots, ax_n)$. Będziemy pisać $F(X)$ dla oznaczenia wyrażenia, w którym występują zmienne x_1, x_2, \dots, x_n . Zbiór \mathbb{R}_+^n stanowią te X , w których $x_1, \dots, x_n > 0$.

Stopniem jednomianu $J(X) = x_1^{k_1} \dots x_n^{k_n}$ nazywamy liczbę $d = k_1 + \dots + k_n$. Równość $J(aX) = a^d J(X)$ jest podstawą do uogólnienia pojęcia stopnia: jeśli istnieje takie d , że dla każdego $a > 0$ zachodzi równość $F(aX) = a^d F(X)$, to wyrażenie F nazywamy *jednorodnym*, a liczbę d – jego *stopniem*. Zauważmy, że dla każdego d możemy powiedzieć, że wyrażenie zerowe ma stopień d .

Nierówność $\mathcal{N}(X)$, w której występują zmienne x_1, \dots, x_n , nazywamy *jednorodną*, jeśli obie jej strony są wyrażeniami jednorodnymi tego samego stopnia.

Załóżmy, że nierówność $\mathcal{N}(X)$ jest pod pewnym warunkiem \mathcal{W} równoważna jednorodnej nierówności $\mathcal{N}^*(X)$, przy czym warunek \mathcal{W} ma postać $F_1(X) = F_2(X)$, w której F_1 i F_2 są jednorodnymi wyrażeniami różnych stopni, które przyjmują wyłącznie dodatnie wartości. Jest wówczas jasne, że jeśli $\mathcal{N}^*(X)$ zachodzi dla wszystkich $X \in \mathbb{R}_+^n$, to $\mathcal{N}(X)$ zachodzi dla wszystkich $X \in \mathbb{R}_+^n$ spełniających warunek \mathcal{W} .

Takie postępowanie spotykamy dość często – za pomocą danego warunku \mathcal{W} ujednorodniamy nierówność po to, by ją wykazać w postaci jednorodnej. Dzięki powyższemu twierdzeniu ten ostatni krok można wykonać już bez korzystania z warunku \mathcal{W} . Taką metodą rozwiązujemy zadania 1–4, a także zadanie 5 z kącika nr 5.

Mniej oczywiste i dość zaskakujące jest to, że ta implikacja działa również w drugą stronę: jeśli $\mathcal{N}(X)$ zachodzi dla wszystkich $X \in \mathbb{R}_+^n$ spełniających warunek \mathcal{W} , to $\mathcal{N}^*(X)$ zachodzi dla wszystkich $X \in \mathbb{R}_+^n$.

Dla dowodu ustalmy dowolne $X \in \mathbb{R}_+^n$ oraz połóżmy $r = F_1(X)/F_2(X)$ i $a = r^{1/(d_2-d_1)}$ (d_1 i d_2 są stopniami odpowiednio F_1 i F_2). Otrzymujemy wtedy równość

$$F_1(aX) = a^{d_1} F_1(X) = a^{d_1} r F_2(X) = a^{d_1} r a^{-d_2} F_2(aX) = F_2(aX),$$

czyli zachodzi warunek \mathcal{W} . Z tego wynika, że nierówności $\mathcal{N}(aX)$, $\mathcal{N}^*(aX)$ i $\mathcal{N}^*(X)$ są równoważne, co kończy dowód wobec dowolności X .

Konsekwencją tego faktu jest to, że przy dowodzeniu nierówności jednorodnej dodatnich zmiennych możemy dodatkowo przyjąć dowolny warunek \mathcal{W} mający wyżej opisaną postać. Można to poćwiczyć na zadaniach 5–7.

Zadania

1. Wykazać, że jeśli liczby $a, b, c > 0$ spełniają warunek $abc = a + b + c$, to $ab + bc + ca \geq 9$.

2. Liczby dodatnie a, b i c spełniają równość $ab + bc + ca = abc$. Dowieść, że
$$\frac{a^2 + b^2}{ab(a+b)} + \frac{b^2 + c^2}{bc(b+c)} + \frac{c^2 + a^2}{ca(c+a)} \geq 1.$$

3. Liczby dodatnie a, b i c spełniają warunek $a + b + c = 1$. Dowieść, że
$$\sqrt{a+bc} + \sqrt{b+ca} + \sqrt{c+ab} \leq 2.$$

4. Udowodnić, że jeśli iloczyn liczb dodatnich a, b, c jest równy 1, to $a^2 + b^2 + c^2 \geq a + b + c$.

5. Wykazać, że dla $a, b, c > 0$ prawdziwa jest nierówność

$$\sqrt{\frac{a}{a+2b+2c}} + \sqrt{\frac{b}{2a+b+2c}} + \sqrt{\frac{c}{2a+2b+c}} \geq 1.$$

6. Udowodnić, że dla liczb dodatnich a, b i c oraz liczby całkowitej $n > 0$ zachodzi nierówność

$$\frac{a^n}{b+c} + \frac{b^n}{c+a} + \frac{c^n}{a+b} \geq \frac{3}{2} \left(\frac{a+b+c}{3} \right)^{n-1}.$$

7. Dowieść, że dla liczb dodatnich a, b i c oraz liczby całkowitej $n > 0$ zachodzi nierówność

$$\frac{a^{n+1}}{b+c} + \frac{b^{n+1}}{c+a} + \frac{c^{n+1}}{a+b} \geq \left(\frac{a^n}{b+c} + \frac{b^n}{c+a} + \frac{c^n}{a+b} \right) \sqrt[n]{\frac{a^n + b^n + c^n}{3}}.$$

Wskazówki do zadań
 1. Po ujednorodnieniu otrzymamy $(ab+bc+ca)(a+b+c) \geq 9abc$, co się sprawdza do nierówności między średnią arytmetyczną a harmoniczną.
 2. W celu ujednorodnienia lewej strony nierówności pomnożyć przez abc , a przenieść $ab+bc+ca$. Następnie skorzystać z nierówności $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$.
 3. Zapisać $a+b+c = a(a+b+c) + b(a+b+c) + c(a+b+c)$ wraz z dwiema analogicznymi równościami. Wykorzystać nierówność $\sqrt{\frac{x}{y}} \geq \frac{x}{x+y}$.
 4. Po ujednorodnieniu mamy wykazanie nierówności $a^2 + b^2 + c^2 \leq \sqrt{abc}(a+b+c)$. Można to zrobić, dodając stronami nierówności między średnią arytmetyczną i geometryczną $\frac{a^2+b^2+c^2}{3} \geq \sqrt[3]{a^2b^2c^2}$ oraz dwie nierówności analogiczne.
 5. Przyjąć $a+b+c = 2a$ dla $0 < a < \frac{2}{3}$ oraz analogicznie dla b i c .
 6. Przyjmując warunek $a+b+c = 1$. Wtedy $\frac{a}{b+c} = \frac{a}{1-a} = \frac{a}{a^2+a+a^2}$. Korzystając dla $k \geq n \geq 1$ z nierówności $\sqrt[k]{\frac{a}{b+c}} \geq \frac{a}{a+b+c}$, otrzymamy $a^k + b^k + c^k \leq \frac{a^k}{a+b+c} + \frac{b^k}{a+b+c} + \frac{c^k}{a+b+c}$.
 7. Znowu przyjmując, że $a+b+c = 1$. Postępując się nierównościami między średnimi potęgowymi, wykazać dla $k \geq n$ nierówność $(\frac{a}{b+c})^k \geq (\frac{a}{b+c})^n$.