KĄCIK POCZĄTKUJĄCEGO OLIMPIJCZYKA 12

Twierdzenie Bézouta

Bartłomiej BZDĘGA

Rozważmy wielomian $P(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$. Korzystając ze wzoru
$$x^k - y^k = (x-y)(x^{k-1} + x^{k-2}y + x^{k-3}y^2 + \ldots + xy^{k-2} + y^{k-1}),$$
możemy zapisać
$$P(x) - P(y) = (x-y)F(x,y), \text{ gdzie } F(x,y) = \sum_{i,j\geqslant 0} a_{i+j+1}x^i y^j$$
(przyjmujemy, że $a_k = 0$ dla k większych od stopnia wielomianu P). Dzięki tej tożsamości mamy trzy następujące twierdzenia.

Twierdzenie 1. *Dla dowolnego wielomianu P w wyrażeniu $P(x) - P(y)$ można wyłączyć przed nawias różnicę $x - y$.*

Twierdzenie 2. *Jeśli wielomian P ma współczynniki całkowite, to dla różnych liczb całkowitych a i b zachodzi podzielność liczb całkowitych $a - b \mid P(a) - P(b)$. W szczególności, jeśli $d \mid P(n)$, to $d \mid P(n+d)$ dla całkowitych $d \neq 0$ i n.*

Twierdzenie 3 (Bézouta). *Wielomian $P(x)$ dzieli się przez dwumian $x - \alpha$ wtedy i tylko wtedy, gdy $P(\alpha) = 0$.*

Twierdzenie 1 już zostało wykazane. Aby udowodnić twierdzenie 2, wystarczy zauważyć, że w wyrażeniu $F(a,b)$ wszystkie współczynniki są jednocześnie współczynnikami wielomianu P, więc są całkowite. Zatem wartość tego wyrażenia jest również liczbą całkowitą.

Kolej na dowód twierdzenia Bézouta. Niech $y = \alpha$ będzie stałą. Wtedy wyrażenie $F(x,\alpha)$ jest wielomianem zmiennej x, a zapis $P(x) = (x-\alpha)F(x,\alpha) + P(\alpha)$ jest dzieleniem wielomianu $P(x)$ przez dwumian $x - \alpha$ z resztą $P(\alpha)$.

Uwaga. Jeśli wielomian P o współczynnikach całkowitych ma pierwiastek całkowity c, to wielomian $P(x)/(x-c)$ również ma współczynniki całkowite. Dowód pozostawiamy Czytelnikowi.

Zadania

1. Wielomian P ma wszystkie współczynniki całkowite i dla każdej liczby naturalnej n zachodzą nierówności $P(-n) < P(n) < n$. Wykazać, że $P(-n) < -n$ dla wszystkich naturalnych n.
2. Wielomian P o współczynnikach całkowitych przyjmuje wartości nieparzyste dla pewnych dwóch kolejnych liczb naturalnych. Udowodnić, że ten wielomian nie ma pierwiastków będących liczbami całkowitymi.
3. Wielomian P o współczynnikach całkowitych przyjmuje wartość 2019 dla pięciu różnych argumentów będących liczbami całkowitymi. Dowieść, że ten wielomian nie ma pierwiastków całkowitych.
4. Wielomian P ma trzeci stopień i wszystkie współczynniki całkowite oraz spełnia równości: $P(1) = 1$, $P(2) = 2$ i $P(3) = 3$. Wyznaczyć najmniejszą możliwą wartość $|P(4)|$.
5. Znaleźć taki wielomian P, który ma czwarty stopień i spełnia równości: $P(0) = 0$, $P(1) = \frac{1}{2}$, $P(2) = \frac{2}{3}$, $P(3) = \frac{3}{4}$, $P(4) = \frac{4}{5}$.
6. Różne wielomiany P i Q spełniają warunek $P(Q(x)) = Q(P(x))$. Wykazać, że wielomian $P(P(x)) - Q(Q(x))$ jest podzielny przez wielomian $P(x) - Q(x)$.
7. Wielomian P o współczynnikach całkowitych ma tę własność, że $P(n)$ jest liczbą pierwszą dla wszystkich naturalnych n. Dowieść, że P jest wielomianem stałym.
8. Ustalmy liczbę całkowitą dodatnią a. Niech $P(x) = x^2 + x - a$. Udowodnić, że jeśli dla pewnego naturalnego $n > \sqrt{a}$ liczby $P(0), P(1), \ldots, P(n-1)$ są względne pierwsze z $P(n)$, to liczba $P(n)$ jest pierwsza.
9. Wyznaczyć wszystkie niestałe wielomiany P o współczynnikach całkowitych, spełniające warunek: Dla każdej liczby całkowitej dodatniej n co najwyżej jedna z liczb $P(1), P(2), \ldots, P(2n-1)$ dzieli się przez n.
10. Wyznaczyć wszystkie wielomiany P o współczynnikach całkowitych, które dla każdego naturalnego n spełniają podzielność $P(n) \mid 2^n - 1$.

Wskazówki do zadań

1. Na mocy pierwszego twierdzenia mamy $2n \mid P(n) - P(-n)$, a z założeń $P(-n) < P(n)$, więc $P(-n) \leqslant P(n) - 2n$.
2. Z twierdzenia 2 dla $d = 2$ wywnioskujemy, że $P(n)$ jest liczbą nieparzystą dla każdego całkowitego n.
3. Niech $P(a_1) = P(a_2) = \ldots = P(a_5) = 2019$. Liczby $a_1, a_2, \ldots, a_5$ są różnymi pierwiastkami wielomianu $P(x) - 2019$, więc na mocy twierdzenia Bézouta $P(x) - 2019 = Q(x)(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_5)$. Gdyby $P(c) = 0$ dla pewnego całkowitego c, to liczba 2019 byłaby iloczynem sześciu liczb całkowitych, wśród których jest pięć różnych liczb.
4. Wielomian $P(x) - x$ ma pierwiastki 1, 2 i 3, więc $P(x) - x = a(x-1)(x-2)(x-3)$ dla pewnego całkowitego $a \neq 0$.
5. Rozważmy wielomian piątego stopnia $Q(x) = (x+1)P(x) - x$. Jego pierwiastkami są 0, 1, 2, 3 i 4, więc $Q(x) = ax(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$ dla pewnego $a \neq 0$. Liczba -1 jest pierwiastkiem wielomianu $Q(x) + x$, więc $Q(-1) = 1$, z czego wyznaczamy a.
6. Niech $p = P(x)$ i $q = Q(x)$. Mamy $P(q) = Q(p)$, więc $P(p) - Q(q) = \Big(P(p) - P(p)\Big) + \Big(Q(p) - Q(q)\Big)$ i wystarczy dwukrotnie skorzystać z twierdzenia 1.
7. Niech $p = P(1)$. Na mocy twierdzenia 1 dla naturalnych k mamy $p \mid P(1+kp)$, więc $P(1+kp) = p$, gdyż wartości P dla argumentów całkowitych są liczbami pierwszymi. Wielomian $P(x) - p$ ma zatem nieskończenie wiele miejsc zerowych, więc jest zerowy.
8. Mamy $P(n) > 1$ dla $n > \sqrt{a}$. Przypuśćmy, że liczba $P(n)$ nie jest pierwsza. Wtedy ma ona dzielnik pierwszy $p \leqslant \sqrt{P(n)} < n+1$, czyli $p \leqslant n$. Wówczas $p \mid P(n-p)$, czyli p jest wspólnym dzielnikiem $P(n)$ i $P(n-p)$, a to jest sprzeczne z założeniami.
9. Dla wszystkich dostatecznie dużych $k > 0$ mamy $P(k) \neq 0$. Niech $n = |P(k)|$. Ponieważ $n \mid P(k)$, również $n \mid P(k+n)$. Zatem $k + n \geqslant 2n$, czyli $|P(k)| = n \leqslant k$ dla dużych k. Stąd można wywnioskować, że $P(x) = x$ albo $P(x) = -x$.
10. Jeśli wielomian P jest stały, to $P(x) = 1$ lub $P(x) = -1$. W przeciwnym razie dla pewnego n mamy $|P(n)| > 1$, więc $P(n)$ ma pewien dzielnik pierwszy p. Mamy wtedy też $p \mid P(n+p)$. Zatem z założeń zadania $p \mid 2^n - 1$ i $p \mid 2^{n+p} - 1$, więc $p \mid 2^{n+p} - 2^n$, czyli $p \mid 2^p - 1$. Jest to sprzeczne z małym twierdzeniem Fermata: $p \mid 2^p - 2$.