KĄCIK POCZĄTKUJĄCEGO OLIMPIJCZYKA 10

Trójmian kwadratowy

Bartłomiej BZDĘGA

Ustalmy liczby rzeczywiste a, b i c, przy czym $a \neq 0$. Wyrażenie ax^2+bx+c nazywamy *trójmianem kwadratowym* zmiennej x o współczynnikach a, b i c, natomiast funkcję $f(x) = ax^2+bx+c$ – *funkcją kwadratową*.

Trójmian kwadratowy można zapisać następująco:

$$\underbrace{ax^2+bx+c}_{\text{postać normalna}} = \underbrace{a(x-p)^2+q}_{\text{postać kanoniczna}} = \underbrace{a(x-x_1)(x-x_2)}_{\text{postać iloczynowa}},$$

gdzie $\Delta = b^2-4ac$, $p = \frac{-b}{2a}$, $q = \frac{-\Delta}{4a}$, $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$, $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ (o ile $\Delta \geqslant 0$). Dowód, który polega na zwykłym przemnażaniu, wspaniałomyślnie pomijamy.

Każda z powyższych postaci ma swoje unikalne zastosowania. Postać kanoniczna mówi nam, że funkcja kwadratowa przyjmuje wartość najmniejszą (gdy $a > 0$) lub największą (gdy $a < 0$) równą q dla argumentu $x = p$. Tę postać wykorzystujemy w zadaniach 2 i 4. Postać iloczynowa jest pomocna w zadaniu 10.

Wyżej określone liczby x_1 i x_2 nazywamy pierwiastkami trójmianu kwadratowego ax^2+bx+c. Są to miejsca zerowe funkcji kwadratowej $f(x) = ax^2+bx+c$ – jest jasne (postać iloczynowa), że $f(x_1) = f(x_2) = 0$. Jeśli $\Delta \geqslant 0$, to trójmian ma dwa różne pierwiastki rzeczywiste. Jeśli $\Delta = 0$, to jeden ($x_1 = x_2$). Jeśli $\Delta < 0$, to trójmian nie ma pierwiastków rzeczywistych.

Warto jeszcze wspomnieć, że funkcja kwadratowa jest ciągła, więc ma *własność Darboux* – jeżeli $y_1 < y_2$ są wartościami pewnej funkcji kwadratowej, to wszystkie liczby rzeczywiste z przedziału $[y_1, y_2]$ też są jej wartościami. Korzystamy z tego w zadaniach 3 i 9.

Porównując postać iloczynową i normalną, otrzymamy $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ i $x_1x_2 = \frac{c}{a}$. Są to *wzory Viete'a*, którymi warto się posłużyć w zadaniach 1, 5 i 7.

Zadania

1. Liczby rzeczywiste $x_1 \leqslant x_2$ i $y_1 \leqslant y_2$ spełniają równości $x_1+x_2 = y_1+y_2$ oraz $x_1x_2 = y_1y_2$. Udowodnić, że $x_1 = y_1$ i $x_2 = y_2$.
2. Niech $a_1, a_2, \ldots, a_n$ będą ustalonymi liczbami rzeczywistymi. Dla jakiego x wartość funkcji
$$f(x) = (x-a_1)^2 + (x-a_2)^2 + \ldots + (x-a_n)^2$$
jest najmniejsza?
3. Liczby rzeczywiste a, b i c spełniają nierówność $(a+b+c)c < 0$, przy czym $a \neq 0$. Wykazać, że $b^2 > 4ac$.
4. Niech $T(x) = x^2+4x+2$. Znaleźć wszystkie rozwiązania równania $T(T(T(x))) = 0$.
5. Wyznaczyć wszystkie pary (b, c) liczb rzeczywistych, dla których trójmian kwadratowy x^2+bx+c ma dwa różne pierwiastki i są nimi b i c.
6. Wykorzystując funkcję kwadratową
$$f(x) = (a_1x+b_1)^2 + (a_2x+b_2)^2 + \ldots + (a_nx+b_n)^2,$$
udowodnić nierówność Cauchy'ego–Schwarza
$$(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2) \geqslant (a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n)^2.$$
7. Liczby m, n oraz $\frac{m^2}{n} + \frac{n^2}{m}$ są całkowite. Udowodnić, że liczba $\frac{m^2}{n}$ również jest całkowita.
8. Funkcja kwadratowa $f(x) = ax^2+bx+c$ spełnia dla każdego $x \in [-1, 1]$ nierówność $|f(x)| \leqslant 1$. Wyznaczyć największą możliwą wartość wyrażenia $|a|+|b|+|c|$.
9. Rozważmy trójmiany kwadratowe $f(x) = x^2+b_1x+c_1$ i $g(x) = x^2+b_2x+c_2$, których współczynniki są rzeczywiste i spełniają warunek
$$(c_2-c_1)^2 + (b_1-b_2)(b_1c_2-c_1b_2) < 0.$$
Dowieść, że trójmiany f i g mają obydwa pierwiastki rzeczywiste, a każdy z nich ma jeden pierwiastek leżący na osi liczbowej pomiędzy pierwiastkami drugiego.
10. Liczba trzycyfrowa, w której a jest cyfrą setek, b – cyfrą dziesiątek, a c – cyfrą jedności, jest pierwsza. Dowieść, że b^2-4ac nie jest kwadratem liczby naturalnej.

Wskazówki do zadań

1. Liczby x_1 i x_2 są, na mocy wzorów Viete'a, pierwiastkami tego samego trójmianu kwadratowego, co liczby y_1 oraz y_2.

2. Po wymnożeniu mamy $f(x) = nx^2 - 2(a_1+\ldots+a_n)x + (a_1^2+\ldots+a_n^2)$, wartość najmniejsza dla $x = \frac{a_1+\ldots+a_n}{n}$.

3. Niech $f(x) = ax^2+bx+c$. Wówczas mamy $f(1)f(0) < 0$, więc funkcja f przyjmuje zarówno dodatnie i ujemne wartości, skąd $\Delta > 0$.

4. Mamy $T(x) = (x+2)^2 - 2$, więc $T(T(T(x))) = (x+8)^8 - 2$. Stąd $x = -8 - \sqrt[8]{2}$ lub $x = -8 + \sqrt[8]{2}$.

5. Na mocy wzorów Viete'a otrzymujemy równania $b + c = -b$ i $bc = c$. Jedyną parą spełniającą warunki jest $(-\frac{1}{2}, 1)$.

6. Mamy $f(x) = (a_1^2+\ldots+a_n^2)x^2 + 2(a_1b_1+\ldots+a_nb_n)x + (b_1^2+\ldots+b_n^2)$. Funkcja f przyjmuje wyłącznie wartości nieujemne, więc $\Delta \leqslant 0$. Jest to nierówność równoważna dowodzonej.

7. Niech $b = -\frac{m^2}{n} - \frac{n^2}{m}$ oraz $c = \frac{m^2}{n} \cdot \frac{n^2}{m} = mn$. Liczby b i c są całkowite, zaś liczby wymierne $\frac{m^2}{n}$ i $\frac{n^2}{m}$ są pierwiastkami trójmianu (unormowanego) x^2+bx+c, więc są całkowite.

8. Ze względu na symetrię względem osi OX i OY, można założyć bez utraty ogólności, że $a > 0$ i $b \geqslant 0$. Jeśli $|a|+|b|+|c| > 3$, to $f(1) = a+b+c > 3+c-|c|$ oraz $f(0) = c$, więc $|f(1)| + 2|f(0)| > 3$, czyli $|f(1)| > 1$ lub $|f(0)| > 1$. Wartość 3 jest osiągalna, na przykład dla funkcji $f(x) = 2x^2 - 1$.

9. Równanie $f(x) = g(x)$ ma dokładnie jedno rozwiązanie $x_0 = \frac{c_2-c_1}{b_1-b_2}$. Wówczas $f(x_0) = g(x_0) = \frac{(c_2-c_1)^2+(b_1-b_2)(b_1c_2-c_1b_2)}{(b_1-b_2)^2} < 0$. Wobec tego wykresy funkcji f i g przecinają się tylko w jednym punkcie, leżącym poniżej osi OX. Resztę załatwia własność Darboux.

10. Przypuśćmy, że $b^2-4ac = d^2$ dla pewnej liczby naturalnej d. Niech $p = 100a+10b+c = f(10)$, gdzie $f(x) = ax^2+bx+c$. Korzystając z postaci iloczynowej, otrzymamy po przekształceniach $4ap = (20a+b+d)(20a+b-d)$. Liczba p jest pierwsza, więc dzieli co najmniej jedną z liczb: $20a+b-d$ lub $20a+b+d$. Tu mamy sprzeczność, bo są to liczby dodatnie mniejsze od p.