Warto sprawdzić, że jedyne grafy ze stabilizatorem równym S_X to graf pełny oraz graf pusty. Zachodzi też równanie $|G_\Gamma| \cdot |G \cdot \Gamma| = |G|$. Wynika stąd, że im większa orbita, tym mniejszy stabilizator, a ponadto: liczby $|G_\Gamma|$, $|G \cdot \Gamma|$ są dzielnikami G. Znacznie bardziej skomplikowane jest sprawdzenie, ile jest orbit, czyli ile elementów ma zbiór $\mathcal{M}/G$. Tym niemniej czasem można powiedzieć coś o orbitach, mając bardzo niewiele danych:

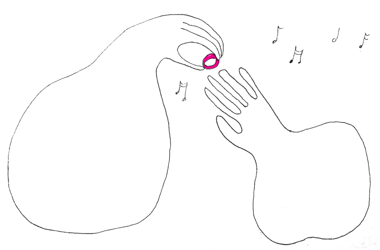
Lemat. *Jeśli p jest pierwsza, grupa G ma p^k elementów i działa na zbiorze $\mathcal{M}$, który ma niepodzielną przez p liczbę elementów, to istnieje element stały, tzn. $\Gamma \in \mathcal{M}$ taki, że $g \cdot \Gamma = \Gamma$ dla wszystkich $g \in G$.*

Dowód. Faktycznie, $\mathcal{M}$ jest sumą orbit, a rozmiar każdej orbity dzieli $|G| = p^k$. Jeśli żadna orbita nie jest jednoelementowa, to rozmiar każdej jest podzielny przez p, zatem i $|\mathcal{M}|$ jest podzielna przez p. Sprzeczność. A więc istnieje Γ takie, że $G \cdot \Gamma = \{\Gamma\}$. □

Zamiast grafów można podobnie analizować inne obiekty. Jeśli będziemy patrzeć na przestrzenie liniowe, to otrzymamy *teorię reprezentacji*, jeśli na *ciała* (patrz poniżej), to teorię Galois, itd. Wreszcie, aby lepiej zrozumieć same grupy, warto badać działania grup na grupach.

Joachim JELISIEJEW

Pierścień



Kolejnym fundamentalnym pojęciem algebraicznym są pierścienie. Zostały one wprowadzone pod koniec XIX wieku z nadzieją na pomoc w udowodnieniu Wielkiego Twierdzenia Fermata. Jak wiadomo, zostało to uczynione dopiero w 1995 roku, więc przez długi czas nadzieja ta była płonna.

Modelowym przykładem pierścienia jest zbiór liczb całkowitych $\mathbb{Z}$. Formalnie, **pierścień przemienny** R to zbiór z działaniami dodawania, odejmowania i mnożenia, przy czym spełnione są naturalne własności: R z dodawaniem i odejmowaniem jest grupą, jest rozdzielność mnożenia względem dodawania, a mnożenie jest łączne i przemienne i posiada jedynkę.

Inne przykłady pierścieni przemiennych to $\mathbb{Q}$ lub $\mathbb{R}$ z naturalnymi działaniami. Przykład z innej półki: jeśli X jest przestrzenią metryczną (patrz str. 6) lub ogólniej przestrzenią topologiczną, to zbiór $C(X, \mathbb{R})$ wszystkich ciągłych funkcji z X do $\mathbb{R}$ jest pierścieniem przemiennym.

Ideał w pierścieniu przemiennym A jest to podgrupa $I \subset A$ taka, że $a \cdot i \in I$ dla wszystkich $a \in A$ oraz $i \in I$. Ten warunek gwarantuje, że w zbiorze A/I da się sensownie mnożyć; tzn. że A/I jest pierścieniem przemiennym. W tym sensie ideał odpowiada podgrupie normalnej. Ideał $I \subsetneq A$ jest **maksymalny**, jeśli nie istnieje ideał $J \subsetneq A$ taki, że $I \subsetneq J$. Każde A posiada przynajmniej dwa ideały: A oraz $\{0\}$. Mówimy, że A jest **ciałem**, jeśli nie posiada żadnych innych ideałów, np. $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ są ciałami, lecz $\mathbb{Z}$ nie jest ciałem.

W pierścieniu $\mathbb{Z}$ jedyne ideały są postaci $n\mathbb{Z} = \{n \cdot a \mid a \in \mathbb{Z}\}$. Ideał $n\mathbb{Z}$ jest maksymalny, jeśli $|n|$ jest liczbą pierwszą.

Jeśli X jest przestrzenią topologiczną i $x \in X$, to podzbiór

$$\mathfrak{m}_x = \{f \in C(X, \mathbb{R}) |\ f(x) = 0\}$$

jest ideałem maksymalnym. Co więcej, jeśli X jest zwartą przestrzenią (dla przestrzeni metrycznej zwartość oznacza, że każdy ciąg zawiera podciąg zbieżny), są to jedyne ideały maksymalne w $C(X, \mathbb{R})$. Zatem jeśli ktoś roztargniony zgubi swoją ulubioną przestrzeń topologiczną X, ale będzie pamiętać, jaki jest pierścień B funkcji ciągłych na tej przestrzeni, to może zrekonstruować X. Mianowicie, punktami X będą ideały maksymalne w B, a zbiory domknięte to zbiory ideałów maksymalnych postaci $V(E) = \{\mathfrak{m} \mid \mathfrak{m} \supset E\}$, gdzie $E \subset B$ jest podzbiorem.

W latach pięćdziesiątych Alexandre Grothendieck zaproponował, by tę operację „odzyskiwania" X z B przeprowadzać dla dowolnego pierścienia B; niekoniecznie pochodzącego od X. Doprowadziło to do powstania *teorii schematów*, która ostatecznie miała wielki udział m.in. w dowodzie Wielkiego Twierdzenia Fermata. Po stu latach pierścienie miały swój rewanż!

Joachim JELISIEJEW

Rozwiązanie zadania M 1597.
Zauważmy, że

$$a + \sqrt{a^2+1} = \frac{1}{\sqrt{b^2+1}+b} = \sqrt{b^2+1} - b,$$

$$b + \sqrt{b^2+1} = \frac{1}{\sqrt{a^2+1}+a} = \sqrt{a^2+1} - a.$$

Dodając stronami te dwie równości, uzyskujemy $a + b = -(a+b)$, czyli $a + b = 0$.

Łatwo sprawdzić, że liczby a, b spełniające założenia zadania rzeczywiście istnieją (np. $a = b = 0$), więc znaleziona wartość 0 istotnie jest osiągalna.