Dlaczego $\sqrt{2}$ nie pasuje do liczb wymiernych?

Zupełnie nieszokująca *zasada dobrego uporządkowania* mówi, że każdy niepusty podzbiór liczb naturalnych ma element najmniejszy. Pokażemy, jak ją wykorzystać do wykazania, że $\sqrt{2}$ jest niewymierne, czyli że dla żadnej liczby naturalnej n liczba $n\sqrt{2}$ nie jest całkowita.

Niech $S = \{n \in \mathbb{N} :\ n\sqrt{2} \in \mathbb{Z}\}$. Załóżmy, że zbiór S jest niepusty. Oczywiście, $S \subset \mathbb{N}$, więc z *zasady dobrego uporządkowania* zbiór S ma element najmniejszy (być może nie jest on jedyny). Niech tym elementem będzie $k \in \mathbb{N}$. Rozważmy następującą liczbę: $(\sqrt{2}-1)k$. Skoro $k \in S$, to $\sqrt{2}k \in \mathbb{Z}$. Zatem $\sqrt{2}k - k \in \mathbb{Z}$ oraz

$$(\sqrt{2}-1)k\sqrt{2} = 2k - \sqrt{2}k > 0.$$

Zauważmy, że $2k \in \mathbb{N}$ oraz $\sqrt{2}k \in \mathbb{Z}$, więc $2k - \sqrt{2}k \in \mathbb{Z}$. W takim razie $(\sqrt{2}-1)k \in S$, ale $(\sqrt{2}-1)k < k$, a założyliśmy, że k jest elementem najmniejszym ze zbioru S. Zatem otrzymujemy sprzeczność z założeniem, że S jest niepustym zbiorem.

Mateusz DĘBOWSKI

Skąd mógł to wiedzieć?

W Δ^3_{18} (*Z notatnika geniusza*) i w tym numerze (str. 8) przedstawione są różne zależności liczbowe pochodzące od Ramanujana. Robią ogromne wrażenie, tym bardziej że Ramanujan podał je bez uzasadnień i dla nas mają status natchnionej wizji. Warto zauważyć, że takie wizjonerskie przedstawianie matematycznych faktów trafiało się wielokrotnie. Zbiorem takich wizji jest ogromne dzieło Diofantosa (które będzie przywołane w Δ^{10}_{18}) powstałe dwa tysiące lat temu, a dotyczące teorii liczb.

W szczególności znajduje się tam stwierdzenie, że dla dowolnych liczb całkowitych a, b, c, d wyrażenie $(a^2+b^2)(c^2+d^2)$ też da się przedstawić jako suma kwadratów dwóch liczb całkowitych i to na dwa sposoby. Zamiast dowodu jest tam po prostu napisane, jakie są to liczby: $ac-bd$ i $ad+bc$ lub $ac+bd$ i $ad-bc$; dla przykładu, biorąc 2, 4, 3 i 5, otrzymamy

$$(4+16)(9+25) = (6-20)^2 + (10+12)^2 = (10-12)^2 + (6+20)^2,$$

proszę sprawdzić.

Dziś ta prawidłowość kojarzy się z twierdzeniem o liczbach zespolonych, które mówi, że *moduł iloczynu równa się iloczynowi modułów*, ale jak mógł to dostrzec Diofantos?

M. K.

Galilleusz Arystotelesa ośmieszył... A co na to Newton?

W *Małej Delcie* z czerwca 2018 *M. K.* opisał prosty dowód podany przez Galileusza, pokazujący, że swobodne spadanie ciał nie może być ruchem, w kórym, jak twierdził Stagiryta, prędkość spadającego ciała jest proporcjonalna do przebytej przez nie drogi. Galileusz posłużył się prostymi argumentami (wszak mechanika analityczna jeszcze nie istniała) logiczno-geometrycznymi. Nie będę ich tu cytował, kto nie pamięta, łatwo je w *Delcie* odnajdzie.

Popatrzmy jednak na taki ruch newtonowskimi oczyma. Równanie $v(t) = s(t)$ możemy zapisać w postaci równania różniczkowego

$$\frac{ds}{dt} = s.$$

Całkując je, otrzymujemy

$$\ln s = t + a,$$

gdzie a jest stałą całkowania. Jeśli teraz wybierzemy (za Galileuszem) na drodze poruszającego się ciała punkty

$$s_n = 2^{-n},$$

to po podstawieniu do ostatniego równania otrzymamy czas t_n, w kórym poruszające się ciało znajdzie się w punkcie s_n:

$$t_n + a = -n \ln 2.$$

Widzimy zatem, że

$$t_{n+1} - t_n = \ln 2.$$

(Istotnie, jest to więcej niż $1/2$). Każdy z nieskończonej liczby odcinków jest w tym ruchu przebywany w takim samym czasie o wartości $\ln 2$.

Jeśli rozwiązanie równania ruchu zapiszemy w postaci *explicite*

$$s = be^t,$$

gdzie $b = e^a$, to widzimy, że punkt $s = v = 0$ odpowiada wartości $t = -\infty$.

Tak więc ciało poruszające się ruchem, o którym mówił Arystoteles, nigdy nie może być w spoczynku ($v = 0$), chyba że myślimy o epoce, zanim Matka Ziemia wyłoniła się z Chaosu i we śnie urodziła Uranosa...

Krzysztof REJMER