mała delta

Pierwiastkowanie pod kreską

Każdy z nas obcował z działaniami pisemnymi na liczbach naturalnych – dodawaniem, odejmowaniem, mnożeniem i dzieleniem. Z pisemnym potęgowaniem można się rozprawić, wielokrotnie stosując pisemne mnożenie. Dzieląc dwie liczby całkowite, możemy otrzymać pełne rozwinięcie dziesiętne (okresowe lub skończone) albo uzyskać dowolną dokładność wyniku. Tak, działania pisemne są sprytne. A co z pierwiastkowaniem? Czy istnieje metoda na pisemne wyznaczanie kolejnych cyfr rozwinięcia dziesiętnego liczby $\sqrt{17}$? Odpowiedź brzmi: tak.

Opis algorytmu

Algorytm zaprezentujemy na konkretnych przykładach.

Przykład 1: $\sqrt{1\ 048\ 576}$

$$\begin{array}{r|l}
1\vert 04\vert 85\vert 76 & a_1^2 \leqslant 1 \\
-1 & \to a_1 = \boxed{1} \\
\hline
4 & a_2(20\cdot\boxed{1}+a_2)\leqslant 4 \\
-0 & \to a_2=\boxed{0} \\
\hline
485 & a_3(20\cdot 10+a_3)\leqslant 485 \\
-404 & \to a_3=\boxed{2} \\
\hline
8176 & a_4(20\cdot 102+a_4)\leqslant 8176 \\
-8176 & \to a_4=\boxed{4} \\
\hline
0 &
\end{array}$$

$$\sqrt{1\ 048\ 576}=1024$$

Przykład 2: $\sqrt{17}$

$$\begin{array}{r|l}
17 & a_1^2 \leqslant 17 \to a_1=\boxed{4} \\
-16 & \\
\hline
100 & a_2(20\cdot\boxed{4}+a_2)\leqslant 100 \\
-81 & \to a_2=\boxed{1} \\
\hline
1900 & a_3(20\cdot 41+a_3)\leqslant 1900 \\
-1644 & \to a_3=\boxed{2} \\
\hline
25600 & a_4(20\cdot 412+a_4)\leqslant 25600 \\
-24729 & \to a_4=\boxed{3} \\
\hline
871\ldots &
\end{array}$$

$$\sqrt{17}=4{,}123\ldots$$

Ideę algorytmu pierwiastkowania można opisać następująco (odwoływać się będziemy do przykładu 1):

1. Dzielimy liczbę na dwucyfrowe segmenty, począwszy od prawej strony – na przykładzie zaznaczone pionowymi liniami.
2. Dla pierwszego z lewej segmentu (może być jednocyfrowy) szukamy największej liczby naturalnej (oznaczmy ją a_1), której kwadrat nie przekracza wartości liczbowej tego segmentu (a_1 to pierwsza cyfra wyniku). Od wartości liczbowej segmentu odejmujemy a_1^2.
   W powyższych przykładach kolejne cyfry wyniku pierwiastkowania zostały wpisane w kwadraty.
3. Do wyniku odejmowania dopisujemy z prawej strony cyfry kolejnego segmentu – analogicznie jak w dzieleniu pisemnym – tę liczbę oznaczmy przez R_1. W przykładzie 1. wynikiem odejmowania $1-1$ jest 0, nie wpisujemy go, stąd w trzeciej linii działania pisemnego pojawia się samo 4.
4. Szukamy takiej największej liczby naturalnej a_2, że $a_2\cdot(20a_1+a_2)\leqslant R_1$ (u nas $a_2\cdot(20\cdot 1+a_2)\leqslant 4$, stąd $a_2=0$). Liczba a_2 jest kolejną cyfrą wyniku pierwiastkowania.
5. Od R_1 odejmujemy liczbę $a_2\cdot(20\cdot a_1+a_2)$ (w przykładzie jest $4-0$). Wynik odejmowania wraz z dopisanymi dwoma cyframi kolejnego bloku to R_2 (w przykładzie $R_2=485$).
6. Przyjmijmy, że $R_i=R_{i-1}-a_i(20\cdot a_1a_2\ldots a_{i-1}+a_i)$ z dopisanymi po prawej stronie dwiema cyframi odpowiedniego segmentu. Przez a_i oznaczamy i-tą cyfrę (patrząc od lewej) wyniku pierwiastkowania. W kolejnych krokach szukamy takiej największej liczby a_j, że $a_j\cdot(20\cdot a_1a_2\ldots a_{j-1}+a_j)\leqslant R_{j-1}$.
7. Powtarzamy krok 6 do czasu, gdy jakieś R_j wyniesie 0 i wszystkie „niewykorzystane” bloki są zerowe, wynik jest wtedy dokładny (do bieżącego wyniku $a_1a_2\ldots a_j$ należy dopisać jeszcze tyle zer, ile bloków zostało),

   albo

   kończymy algorytm w dowolnym innym momencie (wynik jest wtedy przybliżony). Jeśli na tym etapie pozostały niewykorzystane bloki, za każdy taki blok należy dopisać cyfrę 0 do wyniku,

   albo

   procedurę możemy kontynuować *ad infinitum*: jeśli wyczerpaliśmy wszystkie segmenty, a wynik odejmowania nie zeruje się, możemy dopisać nowy blok złożony z dwóch zer, a kolejne cyfry wyniku pierwiastkowania dopisywać po przecinku (analogicznie do dzielenia pisemnego).

Dlaczego to działa?

Warto zaznaczyć, że zaprezentowana metoda jest w istocie dopełnianiem do kwadratu najbliższego danej liczbie. W ten sposób radzono sobie z pierwiastkowaniem przed erą maszyn liczących. Oczywiście, pierwiastki z wielu najważniejszych liczb były stablicowane tak, aby można było szybko odwołać się do ich wartości bez konieczności każdorazowego wykonywania żmudnych obliczeń.

Spróbujemy krótko uzasadnić, dlaczego taki algorytm działa. Spójrzmy na problem następująco: dana jest pewna liczba n. Szukamy takiej liczby b_2, że $(10b_1 + b_2)^2 \leqslant n$ oraz $10b_1 + b_2$ jest największą możliwą liczbą. Można, oczywiście, zgadywać, czego nie polecamy, zamiast tego dokonajmy prostego przekształcenia:

$$(10b_1 + b_2)^2 = 100b_1^2 + 20b_1b_2 + {b_2}^2 = {b_1}^2 \cdot 100 + b_2(2 \cdot b_1 \cdot 10 + b_2).$$

Gdy wrócimy do algorytmu, przekonamy się, że w oparciu o właśnie takie jak wyżej przekształcenie i jednoczesne zachowanie warunku maksymalizacji wyrażenia spełniającego $(10b_1 + b_2)^2 \leqslant n$ szukaliśmy liczb, które wpisywaliśmy w kwadraty.

A tu dla niedowiarków dowód, że wartość $\sqrt{17}$ faktycznie jest liczbą niewymierną. Gdyby $\sqrt{17}$ był liczbą wymierną, czyli równałby się p/q, mielibyśmy $17q^2 = p^2$, a wtedy w rozkładzie obu stron na liczby pierwsze po lewej stronie występowałaby nieparzysta liczba siedemnastek, a po prawej parzysta. Sprzeczność.

Pierwiastki innych stopni

Pokazaliśmy, jak poradzić sobie z obliczaniem pierwiastka kwadratowego z dowolnej liczby całkowitej (nawet jeżeli ta wartość jest liczbą niewymierną). Ale przecież stopień pierwiastka może być inny! Możemy, na przykład, chcieć obliczyć $\sqrt[3]{5}$, $\sqrt[24]{105}$. I cóż wtedy?

Autor niniejszego artykułu nie poddał się! Pierwszym spostrzeżeniem była redukcja problemu do pierwiastków, których stopień jest liczbą pierwszą. Kolejne spostrzeżenie to analogiczne przekształcenie wzoru na odpowiednią potęgę sumy dwóch liczb. Możemy mianowicie zastosować:

Jeżeli stopień n jest liczbą złożoną, na przykład $n = p \cdot q$ dla pewnych liczb pierwszych p i q, to najpierw wykonujemy algorytm dla stopnia p, a następnie dla stopnia q.

$$(10b_1 + b_2)^3 = (10b_1)^3 + b_2(300b_1^2 + b_2(30b_1 + b_2)),$$

$$(10b_1 + b_2)^5 = (10b_1)^5 + b_2(50\,000b_1^4 + b_2(10\,000b_1^3 + b_2(1000b_1^2 + b_2(50b_1 + b_2)))),$$

i tak dalej... Powyższe wzory pozwoliły skonstruować odpowiednie algorytmy. Niestety, nie są to już tak proste i szybkie procedury (zwłaszcza, gdy wymóg ręcznego wykonywania obliczeń nadal pozostaje w mocy). Złożoność obliczeniowa wzrasta, natomiast część, w której „zgadywana" jest liczba (kolejne cyfry), staje się tym trudniejsza, im wyższy jest stopień pierwiastka.

Przejdźmy od teorii do praktyki. Algorytm obliczania pierwiastków stopnia trzeciego prezentujemy na poniższym przykładzie. Zaczynamy od podzielenia pierwiastkowanej liczby na trzycyfrowe segmenty.

Przykład 3: $\sqrt[3]{2\ 352{,}637}$

$$\begin{array}{r|l}
2\,|\,3\,5\,2,|\,6\,3\,7 & a_1^3 \leqslant 1 \\
-\,1 & \to a_1 = \boxed{1} \\
1\,3\,5\,2 & a_2(300 \cdot \boxed{1}^2 + a_2(30 \cdot \boxed{1} + a_2)) \leqslant 1352 \\
 & 3(300 \cdot \boxed{1}^2 + 3(30 \cdot \boxed{1} + 3)) = 1197 \\
-\,1\,1\,9\,7 & \to a_2 = \boxed{3} \\
1\,5\,5\,6\,3\,7 & a_3(300 \cdot 31^2 + a_3(30 \cdot 31 + a_3)) \leqslant 155\,637 \\
 & 3(300 \cdot 31^2 + 3(30 \cdot 31 + 3)) = 155\,637 \\
-\,1\,5\,5\,6\,3\,7 & \to a_3 = \boxed{3} \\
0 &
\end{array}$$

$$\sqrt[3]{2\ 352{,}637} = 13{,}3$$

Zachęcamy do prześledzenia powyższego przykładu – Czytelnik powinien zauważyć podobieństwo do poprzedniego algorytmu oraz ideę stojącą za obliczeniami.

Autor skonstruował również odpowiedni schemat w celu wyznaczenia liczby $\sqrt[5]{2}$, ale nawet sam po wyznaczeniu drugiej cyfry po przecinku miał już dosyć obliczeń ($\sqrt[5]{2} \approx 1{,}14$). Nie ma jednak powodu do rozpaczy – otrzymany wynik jest lepszy od wyników, które można uzyskać prostym kalkulatorem. Te ostatnie bowiem potrafią zwykle obliczać jedynie pierwiastki kwadratowe...

*Małą Deltę przygotował Karol GRYSZKA**

* Uniwersytet Pedagogiczny w Krakowie