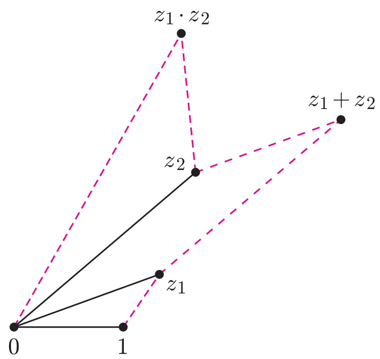
Liczby zespolone czterema sposobami

Marek KORDOS



Suma to taki punkt, że $0z_1(z_1+z_2)z_2$ jest równoległobokiem; iloczyn to taki punkt, że trójkąty $01z_1$ i $0z_2(z_1 \cdot z_2)$ są podobne i mają tę samą orientację.

Jeżeli określimy dodawanie i mnożenie punktów płaszczyzny, z wyróżnionymi punktami 0 i 1, w sposób przedstawiony na rysunku, to otrzymamy **liczby zespolone**. Ten szybki, jasny sposób wprowadzenia liczb zespolonych – zwany *geometrycznym* – okazał się jednak mało praktyczny. Spójrzmy teraz na te liczby inaczej, jak na wektory o początku w 0. Ponieważ wszystkie mają ten sam początek, więc będziemy je nazywać tak jak ich końce. Każdy z nich może być uzyskany z wektora 1 za pomocą podobieństwa spiralnego o środku 0 (podobieństwo spiralne to złożenie jednokładności i obrotu o tym samym środku; jedynie wtedy obojętna jest kolejność wykonywania tych przekształceń). Dodawanie liczb zespolonych w tej postaci – nazwijmy ją *wektorową* – to składanie przesunięć odpowiadających składnikom, natomiast mnożenie to składanie podobieństw spiralnych (proszę na rysunku sprawdzić, że wektor 1 przy wykonaniu podobieństw spiralnych, odpowiadających z_1 i z_2, stanie się wektorem $(z_1 \cdot z_2)$).

Takie ujęcie liczb zespolonych pozwala zauważyć, że każda z nich jest określona przez liczbę r mówiącą, ile razy musiał się przedłużyć wektor 1, aby ją otrzymać i liczbę φ mówiącą, o jaki kąt wektor 1 musiał się obrócić. Pierwszą z tych liczb nazywamy modułem liczby zespolonej, a drugą argumentem. Jeżeli przedstawimy liczbę zespoloną w postaci (r, φ), to – wobec powyższych uwag – wzór na mnożenie będzie wyglądał tak:

$$(r_1, \varphi_1) \cdot (r_2, \varphi_2) = (r_1 \cdot r_2, \varphi_1 + \varphi_2).$$

Przetłumaczenie tego na zwykłe współrzędne kartezjańskie daje (bez rachunków!) wzór zwany nazwiskiem de Moivre'a

$$r_1(\cos\varphi_1, \sin\varphi_1) \cdot r_2(\cos\varphi_2, \sin\varphi_2) = (r_1 \cdot r_2)\big(\cos(\varphi_1+\varphi_2), \sin(\varphi_1+\varphi_2)\big),$$

co łatwo się uogólnia na wzory mówiące o potęgowaniu i pierwiastkowaniu liczb zespolonych.

Liczba (r, φ) ma, jak łatwo zauważyć, współrzędne kartezjańskie $(r\cos\varphi, r\sin\varphi)$, czyli $r(\cos\varphi, \sin\varphi)$.

Trzecia postać liczb zespolonych to przedstawienie ich bezpośrednio za pomocą współrzędnych kartezjańskich. Dodawanie ma wówczas bardzo prostą postać

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d),$$

bo tak się przecież dodaje wektory. Natomiast wzór de Moivre'a pozwala zobaczyć, że i wzór na mnożenie nie jest wiele bardziej skomplikowany:

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc).$$

Oto uzasadniający to rachunek:

jeśli $(a, b) = (r_1\cos\varphi_1, r_1\sin\varphi_1)$, a $(c, d) = (r_2\cos\varphi_2, r_2\sin\varphi_2)$, to

$$\begin{aligned}
(a, b) \cdot (c, d) &= (r_1\cos\varphi_1, r_1\sin\varphi_1) \cdot (r_2\cos\varphi_2, r_2\sin\varphi_2) = \\
&= ((r_1 \cdot r_2)\cos(\varphi_1+\varphi_2), (r_1 \cdot r_2)\sin(\varphi_1+\varphi_2)) = \\
&= (r_1 \cdot r_2)\big(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2, \cos\varphi_1\sin\varphi_2 + \sin\varphi_1\cos\varphi_2\big) = \\
&= \big(r_1\cos\varphi_1 \cdot r_2\cos\varphi_2 - r_1\sin\varphi_1 \cdot r_2\sin\varphi_2, \\
&\qquad r_1\cos\varphi_1 \cdot r_2\sin\varphi_2 + r_1\sin\varphi_1 \cdot r_2\cos\varphi_2\big) = \\
&= (ac - bd, ad + bc).
\end{aligned}$$

Można uczynić teraz dwie obserwacje. Pierwsza to ta, że każda liczba zespolona da się przedstawić jako

$$(a, b) = a(1, 0) + b(0, 1).$$

Gdy $z = (a, b)$, używane są też oznaczenia $\operatorname{Re} z = a$, $\operatorname{Im} z = b$.

Zauważmy, że $(1, 0)$ to po prostu 1 – każdy może sprawdzić, jak się przez $(1, 0)$ mnoży. Natomiast

$$(0, 1)^2 = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = (-1, 0),$$

co jest zwykłą minus jedynką, i to też można sprawdzić mnożąc. Liczba $(0, 1)$ jest oznaczana przez i (od *imaginarius*), nazywana *jednostką urojoną* i stanowi wielką tajemnicę dla różnego rodzaju filozofów (bo jak to możliwe, aby kwadrat był ujemny…). Tak *algebraicznie* ujęte liczby zespolone to sumy $a + ib$, gdzie a i b to liczby rzeczywiste. Rachunki na nich przeprowadza się tak jak na wielomianach, pamiętając zawsze, że $i^2 = -1$. Na przykład wzór na mnożenie wyprowadza się przy tej interpretacji tak:

$$(a + ib) \cdot (c + id) = ac + aid + ibc + i^2bd = (ac - bd) + i(ad + bc).$$

Jest to najstarszy i najczęściej stosowany sposób używania liczb zespolonych.

Oczywiście, można te sposoby mieszać. Często zapisuje się np. liczby w postaci algebraicznej za pomocą modułu i argumentu

$$r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Jest to szczególnie wygodne, ponieważ

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi,$$

ale to już inna sprawa.