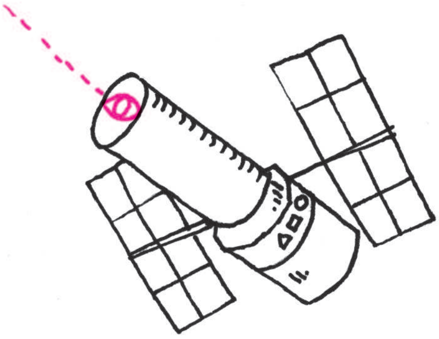
Rozwiązanie zadania M 1513.
Rozważmy wielomian $v(x) = w(x+1)$. Wówczas liczba $\frac{p}{q} - 1 = \frac{p-q}{q}$ jest pierwiastkiem wielomianu v. Niech $v(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$. Wówczas po przemnożeniu obu stron równości $v\left(\frac{p-q}{q}\right) = 0$ przez q^n otrzymujemy

$$a_n(p-q)^n + a_{n-1}(p-q)^{n-1}q + \cdots \\ \cdots + a_1(p-q)q^{n-1} + a_0 q^n = 0.$$

Stąd liczba $a_0 q^n$ jest podzielna przez $p-q$. Ponieważ liczby $p-q$ i q są względnie pierwsze, to wiemy, że $p-q$ dzieli liczbę $a_0 = v(0) = w(1)$.



Przykład wyznaczenia spektroskopowego przesunięcia ku czerwieni: po rozszczepieniu światła zlokalizowano linię OII, która w warunkach laboratoryjnych odpowiada długości $\lambda_e = 3727$ Å, natomiast w obserwowanym widmie energetycznym obiektu astronomicznego została zlokalizowana na długości fali $\lambda_o = 5000$ Å. Wyznaczone na podstawie tego pomiaru przesunięcie ku czerwieni wynosi $z = (\lambda_o/\lambda_e) - 1$, co daje $z = 0{,}8268$.

się w tym miejscu, w jaki sposób możemy je zmierzyć, czyli jak określić zmianę długości fali wyemitowanej ze źródła. Obserwując obiekt w pewnym zakresie długości fal, możemy zauważyć, że w pewnych jej przedziałach dociera do nas więcej (lub mniej) fotonów światła (pod tą ogólną nazwą rozumiemy obok światła widzialnego także podczerwień, nadfiolet oraz inne zakresy fal) niż w innych. Rozkład ten nazywamy widmem energetycznym danego obiektu. Każdy typ i rodzaj gwiazdy czy galaktyki ma swoje charakterystyczne widmo, odróżniające je od innych. Dobra znajomość widm pozwala przypisać obserwowany obiekt do odpowiedniej kategorii. Wbrew pozorom nie zawsze jest to prosta sprawa. Rzeczywiste obserwowane widma zazwyczaj pasują do szablonów z mniejszym lub większym przybliżeniem, a dla słabych obiektów są zwykle dodatkowo zniekształcone przez szum. Sprawę komplikuje ponadto *a priori* nieznane przesunięcie ku czerwieni, które chcemy wyznaczyć. Musimy zatem tak dobrać rodzaj obiektu oraz przesunięcie ku czerwieni, by dopasowanie szablonu i obserwowanego widma było jak najlepsze.

Najprostszy ze znanych sposobów obserwacji widma obiektu astronomicznego polega na pomiarze jego jasności w pewnych, z góry określonych zakresach długości fal. Tak uzyskane widmo nazywamy widmem **fotometrycznym**. Otrzymany kształt widma pozwala wyznaczyć **fotometryczne przesunięcie ku czerwieni**, które uważa się bardziej za wielkość szacunkową niż precyzyjny pomiar. Drugi sposób uzyskania widma polega na rozszczepieniu światła docierającego do teleskopu za pomocą pryzmatu bądź siatki dyfrakcyjnej (w praktyce wykorzystuje się ich kombinację) i zmierzeniu jasności dla różnych długości fal. Uzyskujemy w ten sposób **widmo spektroskopowe**, a na jego podstawie **spektroskopowe przesunięcie ku czerwieni** (o przeglądach spektroskopowych pisaliśmy m.in. w numerze 5/2016: *Wielka struktura w wielkich przeglądach*). Pierwszy sposób jest łatwiejszy i tańszy do przeprowadzenia, bo nie ma potrzeby rozszczepiania światła na pełny zakres długości fal. Potrzeba zatem mniej światła, co oszczędza cenny czas (zarówno obserwatora, jak i samego teleskopu) poświęcony na obserwacje obiektu. Drugi sposób jest daleko bardziej precyzyjny – rozszczepiając światło, można dostrzec dla pewnych długości fal charakterystyczne „szczyty” oraz głębokie „kotliny”: **linie emisyjne** oraz **absorpcyjne**. Są to linie papilarne obiektów astronomicznych, na podstawie których możliwa jest identyfikacja zarówno typu źródła (różne typy obiektów astronomicznych mają swoje charakterystyczne zestawy linii), jak i przesunięcia ku czerwieni. Jeżeli poprawnie zidentyfikujemy sekwencje poszczególnych linii oraz ich przesunięcie względem linii mierzonych w układzie laboratoryjnym, możemy wyznaczyć przesunięcie ku czerwieni z dokładnością do kilku miejsc po przecinku.

Po tym obszernym wstępie przyjrzyjmy się, jak od kuchni wyglądało odkrycie najdalszej znanej obecnie galaktyki. Oprzemy się na opisie zamieszczonym w czasopiśmie *The Astrophysical Journal* (wydanie 819, 10 marca 2016). Opisano w nim, jak z danych przeglądu GOODS, uzyskanych za pomocą szerokokątnej kamery Kosmicznego Teleskopu Hubble'a, wyselekcjonowano sześć potencjalnych kandydatek o szacowanych fotometrycznych przesunięciach ku czerwieni powyżej z=9, charakteryzujących się stosunkowo dużą jasnością. Badacze już na wstępie przygotowali sobie solidny grunt pod odkrycie – nie była to kwestia przypadku. Z wybranych sześciu obiektów GN-z11 wyróżniał się zarówno jasnością, jak i wartością fotometrycznego przesunięcia ku czerwieni, dlatego też w kolejnym etapie badań awansował do obserwacji spektroskopowych. Zebranie odpowiedniej ilości światła pozwalającej na rozszczepienie widma tego obiektu zajęło teleskopowi Hubble'a 12 pełnych okrążeń Ziemi po 96 minut każde, przy czym połowę z nich wykonał on w dniu 11 lutego, a drugą 3 kwietnia 2015 roku. Ponieważ w różnych dniach obserwacje były prowadzone pod nieco innym kątem, pozwoliło to na oszacowanie obecnego w widmie szumu. Uzyskane widmo galaktyki było nadal bardzo słabe. W celu zwiększenia poziomu sygnału do szumu zastosowano metodę dodawania strumieni pochodzących z sąsiednich długości fali, pogarszając, niestety, w ten sposób rozdzielczość, czyli poszerzając przedział długości fali przypadających na jeden piksel obrazu widma. Po tej obróbce do dalszej analizy wybrano zaledwie kilkadziesiąt pikseli, które jednak wystarczyły, by zidentyfikować linię emisyjną Lyman α (λ_e=1215,7 Å), powstającą w wyniku przejścia z poziomu drugiego na poziom podstawowy w atomie wodoru. Jest to najsilniejsza linia w przypadku obiektów o wysokim przesunięciu ku czerwieni – często jedyna widoczna. Na jej podstawie wyznaczono z dla GN-z11. Sam pomiar przesunięcia ku czerwieni dla tak słabego widma to jeszcze nie wszystko, mogło się przecież okazać, że linia ta została źle zidentyfikowana. Aby wykazać poprawność swojego pomiaru, autorzy artykułu sprawdzili również konkurencyjne hipotezy: pierwsza z nich wskazywała, że GN-z11 jest tak naprawdę pełną pyłu galaktyką o przesunięciu ku czerwieni wynoszącym $z = 2{,}5$, w której ustały procesy gwiazdotwórcze, natomiast druga oparta była na przesłaniu, że jest to galaktyka z ekstremalnie silnymi liniami emisyjnymi o przesunięciu ku czerwieni $z = 2{,}1$. Jednak dla obu tych modeli zyskano znacznie gorsze dopasowania niż dla $z = 11{,}1$.

W taki właśnie sposób została odkryta – jeśli o odkryciu wolno tu mówić – najdalsza znana obecnie galaktyka.

Samo bicie rekordów odległości nie jest tu jednak, moim zdaniem, najważniejsze. Istotne wydaje się to, że w ten sposób możemy obserwować bardzo młode galaktyki. Obserwujemy GN-z11 taką, jaka była zaledwie 400 mln lat po Wielkim Wybuchu, gdy powstawały w niej pierwsze gwiazdy, obecnie już dawno wygasłe. Dzięki tej obserwacji mamy, na razie wąski, wgląd w początki istnienia galaktyk i na tej podstawie otwiera się przed nami możliwość weryfikacji istniejących hipotez powstawania galaktyk takich, jakie znamy dzisiaj, w tym naszej.

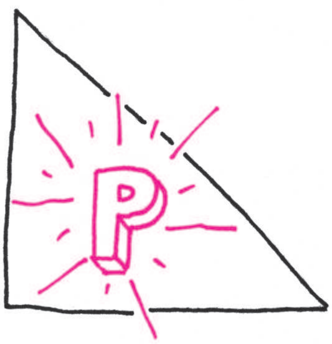
Najłatwiejsze zadanie?

Kamil RYCHLEWICZ, Mariusz SKAŁBA***

Na drugim etapie tegorocznej Olimpiady Matematycznej pojawiło się następujące zadanie:

Zadanie 1. *We wnętrzu trójkąta o bokach długości* 3, 4, 5 *leży punkt* P. *Wykazać, że jeżeli odległości* P *od wierzchołków są wszystkie wymierne, to odległości* P *od boków też.*

Zadanie pojawiło się na zawodach z numerem 1 i (zgodnie z oczekiwaniami) okazało się bardzo łatwe – rozwiązała je znacząca większość uczestników. Przedstawimy szkic rozwiązania.



Umieśćmy trójkąt (który jest, oczywiście, prostokątny) w układzie współrzędnych tak, by jego wierzchołkami były $A = (0,0)$, $B = (4,0)$, $C = (0,3)$. Niech punkt P ma współrzędne (x, y). Wtedy z twierdzenia Pitagorasa wynika, że $|PA| = \sqrt{x^2 + y^2}$, $|PB| = \sqrt{(4-x)^2 + y^2}$. Stąd

$$|PA|^2 - |PB|^2 = (x^2 + y^2) - (16 - 8x + x^2 + y^2) = 8x - 16,$$

a ponieważ $|PA|, |PB| \in \mathbb{Q}$, to $x \in \mathbb{Q}$. Analogicznie $y \in \mathbb{Q}$. Zatem wykazaliśmy, że punkt P leży w wymiernych odległościach od boków AB i AC. Odległość od boku BC możemy obliczyć, korzystając, na przykład, ze wzoru na odległość punktu od prostej. Ponieważ prosta BC jest opisana równaniem $3x + 4y - 12 = 0$, to szukana odległość wynosi

$$\frac{|3x + 4y - 12|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{|3x + 4y - 12|}{5},$$

czyli jest wymierna. □

Pomimo niewielkiej trudności samego zadania możemy powiązać z nim kilka ciekawych problemów. Pierwsze pytanie, które się nasuwa, brzmi: *czy w ogóle istnieje punkt spełniający warunki zadania*? Przed przejściem do dalszej części artykułu Czytelnik może sam spróbować poszukać takich punktów.

Chociaż ich ręczne znalezienie może być trudne, z pomocą komputera szybko znajdujemy kilka punktów spełniających nasze warunki. Najprostszy z nich (o najmniejszych mianownikach) ma współrzędne $\left(\frac{20}{23}, \frac{21}{23}\right)$ i jest odległy od wierzchołków A, B, C odpowiednio o $\frac{29}{23}$, $\frac{75}{23}$, $\frac{52}{23}$.

Tak naprawdę powiedzieć możemy dużo więcej. J.H.J. Almering w 1963 roku udowodnił, że *dla dowolnego (niekoniecznie prostokątnego) trójkąta o bokach wymiernej długości zbiór punktów, których odległości od wszystkich wierzchołków są wymierne, nie tylko jest niepusty, ale nawet nieskończony i ponadto jest gęstym podzbiorem płaszczyzny*! Jak dowodzi T.G. Berry w pracy z 1992 roku, wystarczy jedynie założyć, że kwadraty długości boków są wymierne i co najmniej jeden bok trójkąta ma długość wymierną – to ostatnie założenie jest konieczne, bo w trójkącie o bokach $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ nie ma żadnego punktu o wymiernych odległościach od wierzchołków (zachęcamy Czytelnika do samodzielnego udowodnienia tego faktu).

*student, Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

**Instytut Matematyki, Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski