Liczby zespolone i kwaterniony

Rozwiązywanie równań wymuszało poszerzenie zasobu liczb, jakimi się posługiwano. Równanie $x + 3 = 12$ można było rozwiązać, posługując się najnaturalniejszymi liczbami, zwanymi zresztą *naturalne*, ale równanie $x + 12 = 3$ wymagało rozszerzenia ich zasobu do liczb *całkowitych*. Wyjście poza obręb równań pierwszego stopnia pokazało, że do rozwiązania np. równania $x^2 - 2 = 0$ nie wystarczą nie tylko liczby całkowite, ale nawet wszystkie liczby wymierne, czyli ułamki a/b zbudowane z liczb całkowitych. Aby uzyskać rozwiązanie, do liczb wymiernych trzeba dołączyć nowe liczby, a wśród nich liczbę niewymierną $\sqrt{2}$.

Dlaczego nie wystarczy dołączyć samej liczby $\sqrt{2}$? Bo pojedyncze liczby są tak mało użyteczne, że nawet nie zasługują na uwagę. W istocie, na pytanie: *co to jest liczba?* istnieje tylko jedna, matematycznie użyteczna, choć pozornie paradoksalna, odpowiedź: liczba to element zbioru, którego elementy można dodawać, odejmować, mnożyć i dzielić. Zakłada się przy tym, że działania te powinny spełniać pewne naturalne warunki, jak np. przemienność i łączność dodawania oraz mnożenia, istnienie odwrotności każdej liczby różnej od zera itp., dobrze znane z algebry szkolnej. Zbiory liczb, spełniające te warunki, algebraicy nazywają ciałami.

Prawdziwą naturę liczb rzeczywistych dobrze oddaje definicja, pochodząca z jednego z najlepszych podręczników algebry: „Liczby rzeczywiste, *cokolwiek by to nie było*, mają następujące własności. . . ” – tu następuje lista własności działań. Użyteczność liczb polega nie na tym, że każda z nich z osobna istnieje, lecz na tym, że możemy na nich działać.

Liczby zespolone pojawiły się nie z racji rozwiązywania równań kwadratowych, bo łatwo przystano na to, że gdy tzw. delta jest ujemna, to rozwiązań nie ma. Okazało się jednak już w XVI wieku, że na drodze do rzeczywistych pierwiastków równań trzeciego stopnia trzeba posłużyć się liczbami zespolonymi.

Do zapisywania wyników pomiarów najlepiej nadaje się ciało liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$, które można sobie wyobrażać jako zbiór wszystkich ułamków dziesiętnych, z (przeważnie) nieskończoną liczbą cyfr po przecinku. Pozwala ono też na rozwiązanie bardzo wielu użytecznych równań, ale jednak nie wszystkich; na przykład równanie $x^2 + 1 = 0$ nie ma rozwiązań w zbiorze $\mathbb{R}$, gdyż lewa strona tego równania jest dodatnia dla każdej liczby rzeczywistej x. Można jednak $\mathbb{R}$ tak rozszerzyć, by i dla niego znalazło się rozwiązanie. W szczególności możemy powiększyć zbiór liczb tak, by zawierał także rozwiązanie tego równania, tradycyjnie oznaczane i od *imaginary*, czyli *urojone*. Aby takie rozszerzenie $\mathbb{R}$ stało się ciałem, dołączyć też musimy wszystkie liczby postaci $a + bi$ dla $a, b \in \mathbb{R}$. Działania w tym rozszerzonym ciele $\mathbb{C}$ dane są wzorami

$$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i, \quad (a+bi)\cdot(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i.$$

Jak udowodnił 22-letni Carl Friedrich Gauss w roku 1799, każdy wielomian dodatniego stopnia ma w ciele $\mathbb{C}$ pierwiastek; jest to tak zwane **Zasadnicze Twierdzenie Algebry**. Jest to prawda także wtedy, gdy współczynniki naszego wielomianu są liczbami zespolonymi.

Ale porzućmy kwestię rozwiązywania równań (o niej jest mowa także na stronie 18).

Ponieważ liczba zespolona $a + bi \in \mathbb{C}$ jest wyznaczona przez parę liczb rzeczywistych (a, b), można ją interpretować jako punkt płaszczyzny kartezjańskiej $\mathbb{R}^2$ o współrzędnych $x = a$, $y = b$. Dodanie do dowolnego punktu płaszczyzny liczby $a + bi$ to przesunięcie tego punktu o wektor $[a, b]$. Mniej spodziewane jest jednak to, że pomnożenie punktu przez liczbę $a + bi$, gdy $a^2 + b^2 = 1$, czyli liczbę $\cos\varphi + i\sin\varphi$ odpowiada obróceniu tego punktu wokół punktu $(0, 0)$ o kąt φ. Zatem liczby zespolone pozwalają wygodnie reprezentować wszystkie ruchy sztywne płaszczyzny.

Naturalne było więc pytanie, czy nie da się analogicznie opisać ruchów przestrzeni trójwymiarowej, interpretując $\mathbb{R}^3$ jako ciało. Mimo wielu prób zrealizować tego się nie udawało (dziś wiemy, że jest to niemożliwe). Ale problem opisu ruchów przestrzeni trójwymiarowej (tradycyjny sposób wymaga użycia 12 współczynników) został po dziesięcioletnich wysiłkach rozwiązany przez Williama Rowana Hamiltona w 1843 roku przez uczynienie ciała z przestrzeni czterowymiarowej. Tu potrzebne są aż trzy jednostki urojone. Podanie głosi, że wiążące je zależności

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$$

olśniły go podczas spaceru nad Royal Canal w Dublinie, co uwiecznił, wycinając ten wzór na drewnianej poręczy mostku.

Uzyskane tak liczby postaci $a + bi + cj + dk$, gdzie $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tworzą dzięki tym tożsamościom ciało (co prawda nieprzemienne) nazwane ciałem kwaternionów i oznaczane na cześć Hamiltona przez $\mathbb{H}$.

Odsyłając do mojego artykułu, który będzie można znaleźć w następnym numerze *Delty*, tu podam tylko, jak za pomocą kwaternionów opisać obroty w przestrzeni trójwymiarowej.

Otóż ten cel udaje się zrealizować w następujący sposób. Umieśćmy naszą przestrzeń trójwymiarową wewnątrz $\mathbb{H}$, na ostatnich trzech osiach, tj. jako zbiór „czysto urojonych” kwaternionów $x_2i + x_3j + x_4k$. Niech $u_2i + u_3j + u_4k$ będzie wektorem długości 1, wskazującym oś obrotu, który chcemy zrealizować, oraz niech θ będzie kątem, o jaki chcemy obrócić przestrzeń. Rozważmy kwaternion

$$q = \cos(\theta/2) + \sin(\theta/2)\cdot(u_2i + u_3j + u_4k) \in \mathbb{H}$$

oraz przekształcenie $\mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{H}$ dane wzorem $x \mapsto q \cdot x \cdot q^{-1}$. Łatwo zauważyć, że prosta rozpięta przez wektor $x = u_2i + u_3j + u_4k$ nie poruszy się. Okazuje się, że przekształcenie to przeprowadza czysto urojoną podprzestrzeń na siebie i wykonuje na niej dokładnie ten obrót, który sobie zaplanowaliśmy.

Zbigniew MARCINIAK