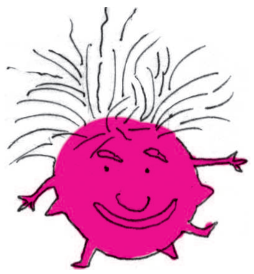
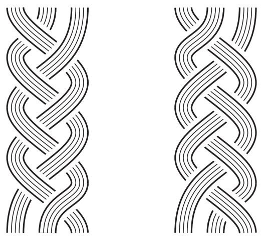
O grupie warkoczy

*Bronisław WAJNRYB**



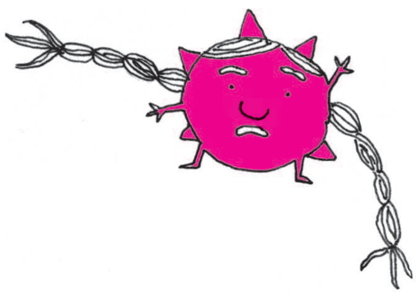
Grupa warkoczy była rozważana po raz pierwszy przez Adolfa Hurwitza w roku 1885, jednak nie pod tą nazwą; w grupie rozważanej przez Hurwitza trudno było dopatrzyć się warkoczy. Nazwę wprowadził Emil Artin w roku 1925, bo w jego interpretacji elementy grupy kojarzą się z warkoczami. Przypomnę, jak się je zaplata. Dzielimy włosy, z których chcemy zapleść warkocz, na trzy pasma równej grubości. Nazwijmy je: pasmo lewe, środkowe i prawe. Zaplatamy lewe pasmo na środkowe. Pasma zmieniają kolejność: lewe pasmo staje się środkowym, środkowe staje się lewym. Następnie zaplatamy prawe pasmo na środkowe, potem lewe na środkowe, i tak dalej. Gdy zbliżamy się do końca długości włosów, związujemy wszystkie trzy pasma razem sznurkiem, gumką, spinką lub wstążką z kokardką. Taki warkocz jest prosty do zaplecenia, estetyczny i trwały, zachowuje swój wygląd.



Rys. 1. Warkocz „normalny" i odwrotny.

Można też zaplatać warkocz odwrotnie: pasmo środkowe na lewe, potem środkowe na prawe, potem środkowe na lewe, i tak dalej. Rezultat wygląda bardzo podobnie, ale jeśli zaczniemy zaplatać warkocz „normalnie" a potem, powiedzmy po położeniu lewego pasma na środkowe, będziemy kontynuować zaplataniem „odwrotnym" (pasmo środkowe na lewe, potem środkowe na prawe i tak dalej), to w pewnym momencie okaże się, że wszystko się rozplotło i mamy z powrotem trzy równoległe pasma, od których zaczęliśmy.

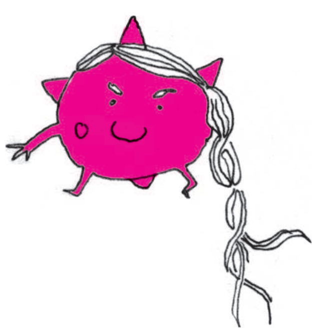
Warkocze matematyczne, o których mówił Artin, mogą się składać z wielu pasm. Każde z nich zastępujemy jednym włosem, zwanym *nicią*, który ma grubość równą zero. Ponadto, dla łatwiejszej interpretacji, będziemy warkocze zaplatać poziomo, jak Pippi Pończoszanka. Zdefiniuję teraz owe matematyczne obiekty. Ustalmy prostokątny układ współrzędnych w przestrzeni. Oś OX jest pozioma, skierowana z lewa na prawo i określa ona kierunek warkocza. Często piszemy t zamiast x i tak też będziemy postępować tutaj. Oś OY też leży w płaszczyźnie poziomej i jest skierowana „w głąb kartki", a oś OZ jest skierowana do góry.



Warkocz o n niciach jest to wspólny wykres n funkcji ciągłych określonych na pewnym przedziale $[a, b]$, $f_1, f_2, \ldots, f_n : [a, b] \to \mathbb{R}^2$, spełniających dwa warunki:

- ich wykresy się nie przecinają, czyli dla każdego t z przedziału $[a, b]$ mamy $f_i(t) \neq f_j(t)$ dla $i \neq j$,
- zbiory ich wartości na początku i na końcu przedziału są takie same, czyli, bardziej formalnie, istnieje taka permutacja τ zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$, że $f_i(b) = f_{\tau(i)}(a)$ dla $i = 1, 2, \ldots, n$.

Wykres funkcji f_i to i-ta nić naszego warkocza. Dla wygody dalszego opisu przyjmiemy oznaczenie $P_i = f_i(a)$ i wybierzemy początki nici $P_1, P_2, \ldots, P_n$ na osi OZ ponumerowane od dołu do góry. Teraz kolejne nici leżą jedna nad drugą i gdy się zaplatają (krzyżują), mówimy, że dolna leży przed górną (patrząc „od nas") lub za górną.

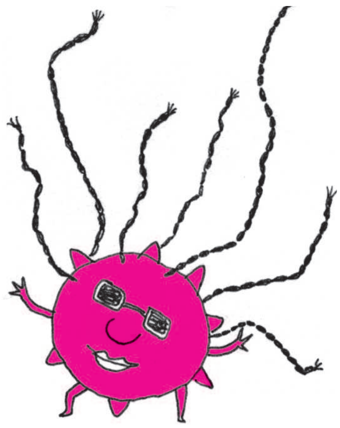


Warkocz będziemy oznaczać małą literą bez indeksu. Powiemy teraz, kiedy dwa warkocze $f = (f_1, \ldots, f_n)$ i $g = (g_1, \ldots, g_n)$ uważamy za takie same (równoważne, izotopijne), co będziemy oznaczać jako $f \sim g$. Najpierw dwa proste przypadki.

1. Przesunięcie: $g_i(t) = f_i(t - c)$ dla $i = 1, 2, \ldots, n$. Warkocz g jest określony na przedziale $[a + c, b + c]$ i jego wykres jest taki, jak wykres warkocza f, tylko przesunięty w lewo lub w prawo.
2. Zaplecenie gęściejsze lub rzadsze: $g_i(t) = f_i(ct)$, $c > 0$, dla $i = 1, 2, \ldots, n$. Warkocz g jest określony na przedziale $[a/c, b/c]$ i jest zapleciony podobnie jak f, ale gęściej (jeśli $c > 1$) lub rzadziej (jeśli $c < 1$).

Ogólnie warkocze uznamy za równoważne, jeśli istnieje między nimi *izotopia*. Cóż to takiego? Jeśli funkcje f_i są określone na $[a, b]$, a g_i są określone na $[d, e]$, łączącą je izotopią nazwiemy funkcje ciągłe dwóch zmiennych $F_1(t, s), \ldots, F_n(t, s)$ określone na trapezie, którego dolna podstawa to $\{(t, 0) : t \in [a, b]\}$, a górna to $\{(t, 1) : t \in [d, e]\}$, spełniające następujący warunek: dla każdego ustalonego s funkcje tworzą warkocz, przy tym $F_i(t, 0) = f_i(t)$, a $F_i(t, 1) = g_i(t)$. Izotopia jest więc ciągłą rodziną warkoczy, łączącą warkocz f z warkoczem g.

*Katedra Matematyki,
Politechnika Rzeszowska



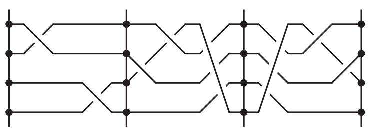
Intuicyjnie, jeśli warkocze nie są zaplecione zbyt gęsto i nie są zbyt długie, to można złapać za lewe końce warkocza lewą ręką i za prawe końce warkocza prawą ręką, i potrząsnąć. Jeśli warkocze są równoważne, to po potrząśnięciu powinny wyglądać identycznie.

Warkocze można w naturalny sposób dodawać. Jeśli warkocz f jest określony na przedziale $[a,b]$, a warkocz g jest określony na przedziale $[b,c]$, to zbiór końców nici pierwszego warkocza pokrywa się ze zbiorem początków nici drugiego warkocza, więc można je odpowiednio połączyć i otrzymać jeden warkocz $f \cdot g$. Jeśli oznaczymy nowy warkocz przez h, to będzie on określony na przedziale $[a,c]$ przez funkcje

$$h_i(t) = \begin{cases} f_i(t) & \text{dla } t \in [a,b], \\ g_{\tau(i)}(t) & \text{dla } t \in [b,c], \end{cases}$$

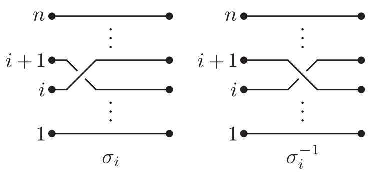
gdzie τ jest permutacją odpowiadającą warkoczowi f. Jeśli przedziały określoności warkoczy nie łączą się na końcach, to można drugi warkocz odpowiednio przesunąć i dopiero wtedy połączyć warkocze.

Tak określone działanie jest łączne, czyli $(f \cdot g) \cdot h = f \cdot (g \cdot h)$. Ponadto nietrudno wykazać, że jeśli $f \sim g$ i $h \sim k$, to $f \cdot h \sim g \cdot k$, więc działanie łączenia warkoczy jest określone (i łączne) na klasach równoważności warkoczy. Jego elementem neutralnym jest warkocz stały $\iota = (f_1, \ldots, f_n)$ (a właściwie jego klasa równoważności), gdzie $f_i(t) = P_i$ dla każdego t z przedziału $[a,b]$. Wspomniałem we wstępie, że dołączenie do warkocza „normalnego” warkocza zaplecionego odwrotnie daje warkocz stały. Ogólnie, warkocz odwrotny do warkocza f otrzymujemy przez odbicie symetryczne warkocza f względem płaszczyzny OYZ. W ten sposób wykazaliśmy, że klasy równoważności warkoczy tworzą grupę ze względu na działanie łączenia warkoczy. Tę grupę nazywamy grupą warkoczy o n niciach i oznaczamy B_n (po angielsku *braid group*).



Rys. 2. Dodawanie warkoczy. Trzeci warkocz jest odwrotny do drugiego.

Dalej nie będę odróżniał klasy równoważności warkocza od jej reprezentanta, zwanego czasem warkoczem geometrycznym, i będę oba nazywał warkoczem. Z kontekstu będzie jasno wynikało, w którym ze znaczeń używam tego pojęcia.

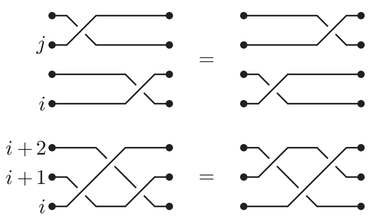


Rys. 3. Generatory grupy B_n.

Weźmy dowolny warkocz i rozważmy jego rzut na płaszczyznę OXZ, czyli „płaszczyznę kartki”. Powiemy, że dwie nici *krzyżują się*, jeśli krzyżują się ich rzuty na płaszczyznę OXZ. Może się zdarzyć, że rzuty trzech nici spotykają się w jednym punkcie lub że rzuty dwóch nici pokrywają się na pewnym odcinku, ale po izotopii (potrząśnięciu) możemy założyć, że liczba skrzyżowań jest skończona, przez każde skrzyżowanie przechodzą tylko dwie nici i dwa różne skrzyżowania mają różne współrzędne t. Wtedy albo nie ma skrzyżowań i warkocz jest prosty (równy ι), albo można podzielić przedział $[a,b]$ na krótkie przedziały tak, że w każdym z nich jest tylko jedno skrzyżowanie. Oznacza to, że nasz (dowolny) warkocz jest złożeniem warkoczy typu σ_i i σ_i^{-1}, przedstawionych na rysunku 3. Innymi słowy, warkocze σ_i, $i = 1, 2, \ldots, n-1$, są *generatorami* grupy B_n. Między tymi generatorami zachodzą relacje

$$(*) \qquad \begin{aligned} \sigma_i\sigma_j &= \sigma_j\sigma_i, & |i-j| &> 1, \\ \sigma_i\sigma_j\sigma_i &= \sigma_j\sigma_i\sigma_j, & |i-j| &= 1, \end{aligned}$$

przedstawione na rysunku 4. Okazuje się, że wszystkie relacje między generatorami σ_i wynikają z relacji $(*)$. Twierdzenie to zostało udowodnione niezależnie przez Artina i Bohnenblusta w 1947 roku.



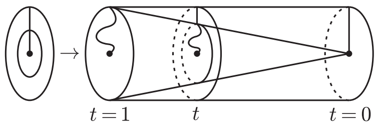
Rys. 4. Relacje w B_n.

* * *

Grupa warkoczy jest ściśle związana z teorią węzłów i pojawia się też w bardzo wielu innych dziedzinach matematyki: w topologii, teorii grup, teorii algebr, geometrii algebraicznej, w algebrach von Neumanna, a oprócz tego w fizyce i mechanice statystycznej. Po Artinie ważne prace o grupie warkoczy pisali laureaci medalu Fieldsa: Pierre Deligne, William Thurston i Vaughan Jones. Opiszę teraz pokrótce inne, równoważne definicje tej grupy.

1. *Grupa* (*rozważana przez*) *Hurwitza.* Ustalamy n punktów $P_1, P_2, \ldots, P_n$ wewnątrz domkniętego koła D na płaszczyźnie. Rozważmy klasy izotopii homeomorfizmów koła D na siebie, które są identycznością na brzegu koła i permutują punkty $P_1, P_2, \ldots, P_n$. Homeomorfizmy są równoważne (izotopijne), jeśli są połączone ciągłą rodziną takich homeomorfizmów. Złożenie homeomorfizmów zachowuje klasy równoważności i otrzymujemy grupę klas izotopii homeomorfizmów izomorficzną z grupą warkoczy. Jak wygląda ten izomorfizm, podpowiada następujący lemat.

Lemat 1 (Alexander). *Jeśli $h : D \to D$ jest takim homeomorfizmem koła o środku 0, że $h(0) = 0$ i h jest tożsamością na brzegu koła, to istnieje taka izotopia $h_t : D \to D$, $t \in [0, 1]$, że $h_0(x) = x$, $h_t(0) = 0$, $h_1(x) = h(x)$ i h_t jest tożsamością na brzegu koła.*



Rys. 5. Lemat Alexandera.

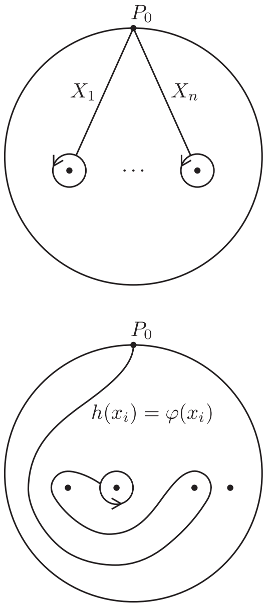
Dowód. Możemy założyć, że D jest kołem jednostkowym na płaszczyźnie zespolonej

$$D = \{z = re^{i\theta} : 0 \leqslant r \leqslant 1,\ 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi\}.$$

Wtedy szukana rodzina homeomorfizmów może być zadana wzorem

$$h_t(re^{i\theta}) = \begin{cases} re^{i\theta}, & t \leqslant r \leqslant 1, \\ t \cdot h\left(\dfrac{r}{t}e^{i\theta}\right), & 0 \leqslant r \leqslant t. \end{cases}$$ □

Podczas izotopii h_t punkty $h_t(P_1), h_t(P_2), \ldots, h_t(P_n)$ poruszają się wewnątrz dysku, nie spotykając się, i funkcje $f_i(t) = h_t(P_i)$ określają nici warkocza odpowiadającego homeomorfizmowi h. Klasa równoważności warkocza zależy tylko od klasy izotopii h.

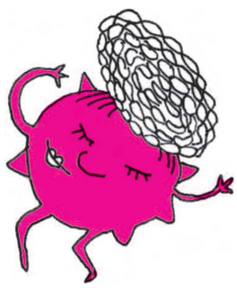


Rys. 6. Warkocze jako automorfizmy grupy wolnej.

2. Gdy dany jest warkocz $f = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$, to dla każdego $t \in [a, b]$ określa on zbiór n różnych punktów $f_1(t), \ldots, f_n(t)$ na płaszczyźnie; dla $t = a$ i dla $t = b$ jest to ten sam zbiór. Można więc powiedzieć, że warkocz to zamknięta droga w przestrzeni n-elementowych nieuporządkowanych podzbiorów płaszczyzny (przestrzeni konfiguracyjnej n punktów w płaszczyźnie), oznaczanej $C_n(\mathbb{R}^2)$. Zatem grupa warkoczy B_n to grupa podstawowa $\pi_1(C_n(\mathbb{R}^2))$.

3. Zamiast o $\mathbb{R}^2$ można mówić o płaszczyźnie $\mathbb{C}$ liczb zespolonych. Zbiorowi n-elementowemu liczb zespolonych $\{z_1, z_2, \ldots, z_n\}$ jednoznacznie odpowiada wielomian unormowany $f(z) = (z - z_1)(z - z_2)\ldots(z - z_n)$ o różnych pierwiastkach zespolonych. Grupę B_n można więc też interpretować jako grupę podstawową przestrzeni wielomianów unormowanych stopnia n o współczynnikach zespolonych, bez pierwiastków wielokrotnych. Zauważmy, że wielomian jest określony przez n swoich współczynników. Ponadto dla wielomianów bez pierwiastków wielokrotnych wyróżnik Δ, który jest wielomianem od współczynników, jest różny od zera. Jeśli zatem oznaczymy $H = \{(a_0, \ldots, a_{n-1}) : \Delta(a_0, \ldots, a_{n-1}) = 0\}$, to $B_n = \pi_1(\mathbb{C}^n \setminus H)$.

4. Ostatnia interpretacja grupy warkoczy należy znów do Artina. Zamiast wyróżnić punkty $P_1, P_2, \ldots, P_n$ w dysku D możemy je z niego wyrzucić. Wtedy mówimy o grupie podstawowej $\pi_1(D \setminus \{P_1, P_2, \ldots, P_n\}, P_0) = F_n$ z punktem bazowym P_0 na brzegu dysku D. Homeomorfizm h indukuje automorfizm grupy F_n, która jest grupą wolną o generatorach $x_1, \ldots, x_n$ przedstawionych na rysunku 6.



Lemat 2 (Artin). *Homomorfizm $\phi : F_n \to F_n$ jest indukowany przez homeomorfizm $h : D \to D$ (który jest warkoczem i w szczególności jest automorfizmem) wtedy i tylko wtedy, gdy $\phi(x_1 x_2 \ldots x_n) = x_1 x_2 \ldots x_n$ i dla każdego $k \in \{1, 2, \ldots n\}$, $\phi(x_k)$ jest sprzężone z pewnym x_j, czyli $\phi(x_k) = A_k x_j A_k^{-1}$.*

Stąd grupa B_n jest izomorficzna z powyższą podgrupą automorfizmów grupy wolnej.

W roku 2001 Daan Krammer i Stephen Bigelow udowodnili (osobno), że grupa B_n jest grupą liniową, izomorficzną z pewną podgrupą multiplikatywnej grupy macierzy. Był to otwarty problem przez wiele lat. Z tego twierdzenia wynika bardzo wiele ważnych własności grupy B_n, ale większość była już znana przed jego udowodnieniem.

Na koniec chciałbym przytoczyć jeden otwarty problem, który można łatwo sformułować. Warkocz nazywamy *dodatnim*, jeśli można go zapisać jako iloczyn dodatnich generatorów (same σ_i bez σ_i^{-1}). Warkocz jest *półdodatni*, jeśli można go zapisać jako iloczyn elementów sprzężonych z dodatnimi generatorami. Należy znaleźć algorytm, który sprawdza, czy warkocz jest półdodatni. Wiadomo, że istnieje rozwiązanie dla warkoczy o trzech niciach, podane przez S. Orevkova. Może Tobie, Czytelniku, uda się znaleźć rozwiązanie dla większej liczby nici?