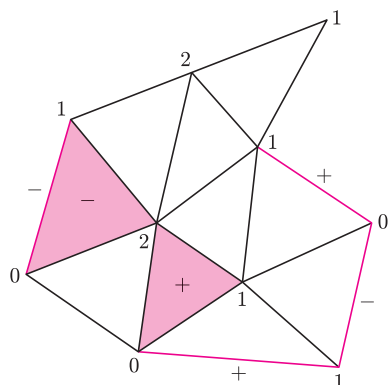
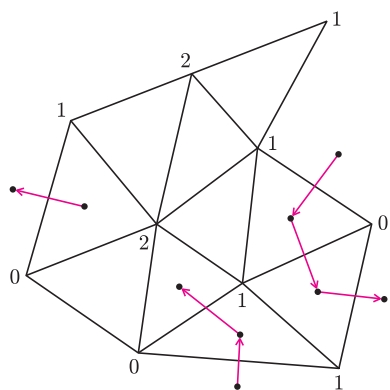
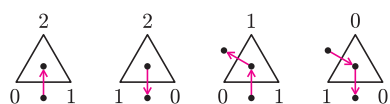


Kolorowanie wielomianów

Tomasz IDZIASZEK*



Rys. 1. Striangulowany wielokąt; kolorem wyróżniono trójkąty i odcinki odgrywające rolę w lemacie Spernera.



Rys. 2. Ilustracja dowodu lematu Spernera.

Lemat Spernera. Narysujmy na płaszczyźnie wielokąt i dokonajmy jego *triangulacji*, czyli podziału na trójkąty, które mogą stykać się z innymi trójkątami wspólną krawędzią lub wspólnym wierzchołkiem (jak na rysunku 1). Wierzchołki tych trójkątów „pokolorujemy”, tzn. każdemu z nich przypiszemy jego „kolor” – liczbę ze zbioru $\{0, 1, 2\}$.

Wyróżnimy trójkąty, które mają wierzchołki wszystkich trzech kolorów. Jeśli poruszając się po obwodzie trójkąta przeciwnie do ruchu wskazówek zegara widzimy liczby w kolejności 0, 1, 2, to mamy do czynienia z trójkątem „dodatnio zorientowanym”. Oznaczmy liczbę takich trójkątów przez T_+ , natomiast liczbę trójkątów „ujemnie zorientowanych” przez T_- .

Interesować nas też będą krawędzie na brzegu wielokąta. Jeżeli wierzchołki takiej krawędzi mają kolory x i y (przy czym kolor x ma wierzchołek, który napotykamy najpierw, gdy poruszamy się po obwodzie wielokąta przeciwnie do ruchu wskazówek zegara), to taką krawędź nazwiemy xy . Wyróżnimy krawędzie, które mają kolory 0 i 1. Krawędzie 01 nazwiemy „dodatnio zorientowanymi”, natomiast krawędzie 10 będą „ujemnie zorientowane”. Ich liczbę oznaczymy, odpowiednio, przez K_+ i K_- .

Ciekawy lemat (znany jako *skierowana wersja lematu Spernera*) podaje zależność między tym, co musi się dzieć wewnątrz takiego triangulowanego wielokąta, a tym, co się dzieje na jego brzegu – mianowicie

$$(\star) \quad T_+ - T_- = K_+ - K_-.$$

Dowód lematu jest bardzo prosty. Przetnijmy każdą z krawędzi 01 i 10 prostym wektorem (w kierunku takim, jak na rysunku 2) i utwórzmy z tych wektorów graf. Graf ten składa się ze skierowanych ścieżek. Każda ścieżka zaczyna się w ujemnie zorientowanym trójkącie lub na dodatnio zorientowanym odcinku, natomiast kończy się w dodatnio zorientowanym trójkącie lub na ujemnie zorientowanym odcinku. Liczba początków ($T_- + K_+$) musi być równa liczbie końców ścieżek ($T_+ + K_-$), co dowodzi równości (\star) .

Liczby zespolone. O liczbach zespolonych (ich zbiór będziemy oznaczać przez \mathbb{C}) możemy myśleć jak o wektorach (postaci $[a, b]$) na płaszczyźnie. Na liczbach tych możemy wykonywać działania. Dodawanie wykonuje się dokładnie tak samo jak dodawanie wektorów. Aby zdefiniować mnożenie, potrzebne są nam dwa pojęcia. *Argumentem* liczby zespolonej z nazywamy kąt, który tworzy ona z wektorem $[1, 0]$ i oznaczamy go przez $\arg z$. (Argument jest dany z dokładnością do 2π , tzn. jeżeli ϕ jest argumentem z , to $\phi \pm 2\pi$ też. W dalszym ciągu ta niejednoznaczność nie będzie nam przeszkadzała. Przyjmujemy także, że $\arg 0 = 0$.) *Modulem* liczby zespolonej z nazywamy długość wektora reprezentującego z i oznaczamy go przez $|z|$. Łatwo zauważyć, że $\arg z$ i $|z|$ jednoznacznie wyznaczają liczbę z .

Wynikiem mnożenia dwóch liczb z_1 i z_2 jest liczba zespolona z o argumentie $\arg z_1 + \arg z_2$ i module $|z_1| \cdot |z_2|$.

Teraz, gdy umiemy już dodawać i mnożyć, możemy zdefiniować *wielomian* zmiennej zespolonej (analogicznie jak wielomian zmiennej rzeczywistej): wielomianem stopnia n zmiennej zespolonej z będziemy nazywać funkcję $w : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ daną wzorem

$$w(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0,$$

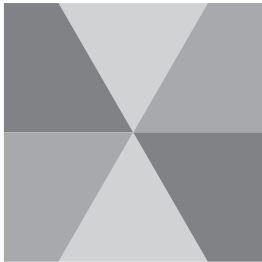
gdzie a_0, \dots, a_n są liczbami zespolonymi oraz $a_n \neq 0$.

Zasadnicze twierdzenie algebry głosi, że każdy wielomian dodatniego stopnia zmiennej zespolonej ma co najmniej jeden pierwiastek. Jest wiele dowodów tego ważnego twierdzenia, ale lemat Spernera pomoże nam je udowodnić w zaskakująco elementarny sposób.

*Instytut Informatyki UW



Rys. 3. Kolorowanie wielomianu z .



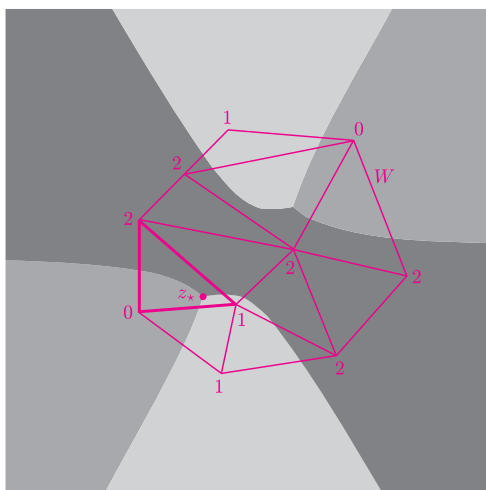
Rys. 4. Kolorowanie wielomianu z^2 .



Rys. 5. Kolorowanie wielomianu $z^2 - 1$.



Rys. 6. Kolorowanie wielomianu $z^3 - 1$.



Rys. 7. Ilustracja dowodu zasadniczego twierdzenia algebry. Kolorowanie wielomianu $z^2 - i$. Poza wielokątem W wielomian wygląda jak z^2 .

Kolorowanie. Ustalmy wielomian $w(z)$. Przez *kolorowanie wielomianu* nazwiemy kolorowanie płaszczyzny zespolonej \mathbb{C} trzema kolorami 0, 1, 2 w zależności od argumentu liczby zespolonej $w(z)$. Kolor k -ty otrzymują liczby ze zbioru

$$\left\{ z \in \mathbb{C} : \frac{2\pi k}{3} \leq \arg w(z) < \frac{2\pi(k+1)}{3} \right\}.$$

Tak pokolorowaną płaszczyznę (rys. 3) oznaczymy przez $\mathbb{C}_{w(z)}$.

Popatrzmy na kilka przykładów. Jeśli wielomian $w(z)$ będzie stopnia 0, to cała płaszczyzna będzie jednokolorowa. Jeśli wielomian będzie postaci $w(z) = z + [a, b]$, to płaszczyzna będzie podzielona na trzy przystające kąty o wspólnym wierzchołku w punkcie $(-a, -b)$. Będzie to wyglądało tak samo jak na rysunku 3, tylko punkt zbiegu kolorów będzie leżał gdzie indziej.

Aby pokolorować wielomian $w(z) = z^2$, sięgniemy do definicji mnożenia liczb zespolonych. Mamy $\arg z^2 = 2 \arg z$, zatem jeśli punkt z dostał kolor 0, to $\frac{2\pi k}{6} \leq \arg z < \frac{2\pi(k+1)}{6}$ lub $\frac{2\pi(k+3)}{6} \leq \arg z < \frac{2\pi(k+4)}{6}$. Analogiczne rozumowanie w przypadku kolorów 1 i 2 prowadzi nas do wniosku, że \mathbb{C}_{z^2} jest podzielona na sześć przystających kątów o wierzchołkach w punkcie $(0, 0)$ (patrz rysunek 4).

Nietrudno się przekonać o tym, że kolorując $w(z) = z^n$, będziemy musieli namalować $3n$ przystających kątów. Będą one miały kolejno kolory 0, 1, 2, 0, 1, 2 itd.

Do tej pory szło nam łatwo, ale już w przypadku wielomianu $z^2 - 1$ napotykamy kłopoty. Z pomocą komputera możemy wygenerować kolorowanie tego i innych wielomianów (rysunki 5 i 6, a także okładka). Obserwując obrazki, możemy dojść do dwóch wniosków:

1. Łatwo na rysunku znaleźć zera wielomianu. Są to dokładnie te punkty, w których zbiegają się wszystkie trzy kolory.
2. Niech $w(z)$ będzie wielomianem stopnia n . Im dalej od punktu $(0, 0)$, tym bardziej kolorowanie $w(z)$ przypomina kolorowanie z^n .

Pierwszy z wniosków wynika z ciągłości $w(z)$. Dla dowodu drugiego zauważmy, że przy $|z| \rightarrow \infty$ mamy $\frac{w(z)}{z^n} \rightarrow a_n$, zatem poza dostatecznie dużym kołem B o środku w punkcie $(0, 0)$ $\mathbb{C}_{w(z)}$ będzie wyglądało prawie jak \mathbb{C}_{z^n} .

Wiemy zatem, co się dzieje poza dużym kołem B , tym bardziej wiemy też, co się dzieje poza dowolnym wielokątem wypukłym W zawierającym to koło. Nie wiemy jednak, co się dzieje w jego wnętrzu, ale spróbujemy to odgadnąć, badając jego brzeg. Do tego przyda nam się lemat Spernera. Dokonajmy triangulacji wielokąta W i pokolorujmy jego wierzchołki. Kolorowanie będzie wyznaczone przez $\mathbb{C}_{w(z)}$ (patrz rysunek 7). Jeśli trójkąty są dostatecznie małe, to na brzegu pojawiają się tylko krawędzie 00, 01, 11, 12, 22 i 20. Krawędzi 01 jest dokładnie n (znowu przy założeniu dostatecznie drobnej triangulacji), zatem $K_+ = n$.

Analogicznie, brak krawędzi 10 powoduje, że $K_- = 0$ i prawa strona równania (\star) jest równa n . Wynika z tego, że $T_+ \geq n$, zatem w wielokącie W istnieje trójkąt trójkolorowy.

Zdefiniujmy teraz taki ciąg triangulacji $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2, \dots$, że średnica największego trójkąta w \mathcal{T}_k dąży do 0 przy $k \rightarrow \infty$. W triangulacji \mathcal{T}_k znajdziemy trójkolorowy trójkąt o wierzchołkach z_k^0, z_k^1 i z_k^2 (punkt z_k^i ma kolor i). Ponieważ ciąg punktów z_k^0 jest ograniczony przez wielokąt W , więc na podstawie twierdzenia Bolzano-Weierstrassa można z niego wybrać podciąg zbieżny $z_{k_l}^0 \rightarrow z_*$. Z tego, co powiedzieliśmy o średnicach, wynika, że podciągi $z_{k_l}^1$ i $z_{k_l}^2$ również są zbieżne do tej samej granicy z_* .

Widać zatem, że w punkcie z_* zbiegają się wszystkie trzy kolory, zatem $w(z_*) = 0$, co kończy dowód zasadniczego twierdzenia algebry.