Klub 44 M

Termin nadsyłania rozwiązań: 31 XII 2020

Zadania z matematyki nr 807, 808

Redaguje Marcin E. KUCZMA

807. Dane są liczby $A, B > 0$; $AB < 1$. Funkcje $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełniają dla wszystkich $x, y \in \mathbb{R}$ warunki

$$|f(x) - f(y)| \leqslant A \cdot |x - y|, \qquad |g(x) - g(y)| \leqslant B \cdot |x - y|,$$

przy czym f jest różnowartościowym odwzorowaniem zbioru $\mathbb{R}$ na cały zbiór $\mathbb{R}$; ma więc funkcję odwrotną $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $(f(h(x)) = h(f(x)) = x)$. Udowodnić, że funkcja $g + h$ też jest różnowartościowym odwzorowaniem zbioru $\mathbb{R}$ na cały zbiór $\mathbb{R}$.

808. Znaleźć wszystkie pary liczb wymiernych $x, y > 1$ spełniających równanie $x^y = xy$.

Zadanie 808 zaproponował pan Witold Bednarek z Łodzi.

Rozwiązania zadań z numeru 6/2020

Przypominamy treść zadań:

803. Dane są liczby rzeczywiste $a > b > 0$. Udowodnić, że zbiór liczb rzeczywistych x spełniających równanie $\lfloor ax + b\rfloor = \lfloor bx + a\rfloor$ zawiera pewien przedział długości $1/a$. Pokazać też, że dla dowolnej liczby $b > 0$ można znaleźć liczbę $a > b$ tak, by rozważany zbiór zawierał przedział długości większej niż $1/a$.

804. Niech p będzie liczbą pierwszą; $p > 2$. Dla liczby całkowitej r niech A_r oznacza zbiór takich permutacji $(x_1, \ldots, x_p)$ zbioru wszystkich reszt (mod p), że

$$x_1 + 2x_2 + \ldots + px_p \equiv r \pmod p.$$

Dowieść, że jeśli $0 < r < s < p$, to zbiory A_r i A_s są równoliczne.

803. Dla ustalonej liczby całkowitej n przedział $I_n = \left[\frac{n-b}{a}, \frac{n+1-b}{a}\right)$ jest zbiorem tych liczb x, dla których $\lfloor ax + b\rfloor = n$, zaś przedział $J_n = \left[\frac{n-a}{b}, \frac{n+1-a}{b}\right)$ jest zbiorem tych x, dla których $\lfloor bx + a\rfloor = n$. Należy wykazać, że dla pewnego n część wspólna $I_n \cap J_n$ zawiera przedział długości $1/a$. Ponieważ przedział I_n ma taką właśnie długość, wystarczy, żeby był on zawarty w J_n. Taka inkluzja ma miejsce, gdy jednocześnie zachodzą nierówności $\frac{n-b}{a} \geqslant \frac{n-a}{b}$, $\frac{n+1-b}{a} \leqslant \frac{n+1-a}{b}$. Po prostym przekształceniu ta koniunkcja przybiera postać

$$n(a - b) \leqslant a^2 - b^2 \leqslant (n + 1)(a - b);$$

wobec założenia $a > b$ jest to równoważne nierówności podwójnej

$$n \leqslant a + b \leqslant n + 1. \tag{1}$$

Zatem dla $n = \lfloor a + b\rfloor$ rozważany w zadaniu zbiór zawiera przedział I_n długości $1/a$.

W dalszej części zadania należy wykazać, że dla każdego $b > 0$ istnieje liczba $a > b$, dla której rozważany zbiór zawiera przedział dłuższy niż $1/a$. W tym celu bierzemy dowolną liczbę $a > b$ taką, że $a + b$ jest liczbą całkowitą. Wówczas każda z liczb całkowitych $n = a + b$ oraz $n = a + b - 1$ spełnia warunki (1). Dla pierwszej z tych liczb dostajemy przedział $I_n = \left[1, 1 + \frac{1}{a}\right)$, zaś dla drugiej $I_n = \left[1 - \frac{1}{a}, 1\right)$; i każdy z tych przedziałów zawiera się w rozważanym zbiorze. Łącząc je, dostajemy przedział długości $2/a$; więc większej niż $1/a$; a o to chodziło.

804. Teza wynika wprost z tego, że mnożenie przez element niezerowy jest bijekcją ciała $\mathbb{Z}_p$. W języku bardziej elementarnym: jeśli $(x_1, \ldots, x_p)$ jest permutacją zbioru $\{0, 1, \ldots, p-1\}$, zaś r jest elementem zbioru $\{1, \ldots, p-1\}$, to reszty z dzielenia liczb $rx_1, rx_2, \ldots, rx_p$ przez p są wszystkie różne – tworzą więc także permutację zbioru $\{0, 1, \ldots, p-1\}$. Przy tym jeśli wyjściowa permutacja należała do zbioru A_1 – czyli spełniała zależność $\sum_{i=1}^{p} ix_i \equiv 1 \pmod p$ – to po pomnożeniu wszystkich jej wyrazów przez r utworzy permutację, w której analogiczna suma przystaje do r – czyli permutację należącą do zbioru A_r.

Zostało w ten sposób określone odwzorowanie ze zbioru A_1 do zbioru A_r. Ono jest odwracalne; weźmy bowiem element $t \in \{1, \ldots, p-1\}$, dla którego $rt \equiv 1 \pmod p$ (taki element t istnieje, bo reszty z dzielenia liczb $r, 2r, \ldots, (p-1)r$ przez p są wszystkie różne i niezerowe). Jeśli teraz permutacja $(y_1, \ldots, y_p)$ znajduje się w zbiorze A_r, to po pomnożeniu wszystkich wyrazów przez t znajdzie się w zbiorze A_1. Uzyskane odwzorowania $A_1 \to A_r$ (mnożenie przez r) oraz $A_r \to A_1$ (mnożenie przez t, gdzie $rt \equiv 1$) są wzajemnie odwrotne. To dowodzi, że zbiór A_r jest równoliczny ze zbiorem A_1. Skoro tak jest dla każdej niezerowej reszty r, znaczy to, że wszystkie zbiory $A_1, \ldots, A_{p-1}$ są równoliczne.

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 797 ($WT = 2{,}57$) i 798 ($WT = 2{,}11$) z numeru 2/2020

Błażej Żmija	Kraków	48,34
Michał Adamaszek	Kopenhaga	47,63
Janusz Fiett	Warszawa	44,67
Zbigniew Skalik	Wrocław	43,94
Franciszek S. Sikorski	Warszawa	41,91
Paweł Burdzy	Warszawa	41,58
Marek Spychała	Warszawa	40,62
Jakub Węgrecki	Kraków	39,40
Andrzej Kurach	Ryjewo	38,41
Marcin Małogrosz	Warszawa	36,93
Karol Matuszewski	Rawicz	36,19

Trzej Panowie mijają linię magiczną *44 p.*: **Michał Adamaszek** po raz piąty – Weteran od 17 lat (potem długa przerwa); **Janusz Fiett** po raz trzeci – Weteran od dziś; **Błażej Żmija** – nowy przybysz do K44M!