O uogólnieniach i uszczególnieniach problemów matematycznych

*Karol GRYSZKA**

* Uniwersytet Pedagogiczny w Krakowie

W trakcie lektury artykułu Piotra Chrząstowskiego-Wachtela o uogólnieniach (Δ^2_{20}) przypomniałem sobie o kilku innych problemach matematycznych, które podlegają opisanej tam zasadzie. Przypomnę – problem postawiony w pewnym szczególnym przypadku może okazać się trudniejszy do udowodnienia niż problem ogólny. Z drugiej strony wiem, że czasami rozwiązanie przypadku szczególnego daje gotowe rozwiązanie przypadku ogólnego. Chciałbym przybliżyć Czytelnikowi kilka innych przykładów takiego postępowania, które poznałem w trakcie studiów oraz podczas wędrówki po ciekawych problemach matematycznych.

Do pierwszego problemu niezbędne jest krótkie wprowadzenie terminologiczne. Funkcję $f : X \to Y$ nazywamy **iniekcją** (funkcją różnowartościową), jeśli z warunku $x_1 \neq x_2$ wynika, że $f(x_1) \neq f(x_2)$. Funkcję f nazywamy **surjekcją** (funkcją na), gdy dla dowolnego $y \in Y$ istnieje $x \in X$ takie, że $f(x) = y$. Funkcja, która jest jednocześnie iniekcją i surjekcją, to **bijekcja**.

Zbiór X jest skończony, gdy istnieje liczba $n \in \mathbb{N}$ oraz bijekcja między zbiorami X oraz $\{1, \ldots, n\}$. Piszemy wtedy również $|X| = n$.

Problem 1: Niech X będzie zbiorem skończonym. Udowodnić, że dowolna iniekcja $f : X \to X$ jest bijekcją.

Rozwiązanie: Uogólnijmy problem: udowodnimy, że jeżeli X oraz Y są zbiorami skończonymi o tej samej liczbie elementów oraz $f : X \to Y$ jest iniekcją, to f jest bijekcją. Rozwiązanie przebiega indukcyjnie ze względu na liczbę $n = |X|$ elementów zbioru X. Oczywiście przypadek $n = 1$ jest spełniony, przechodzimy zatem do kroku indukcyjnego. Niech $|X| = n + 1$. Niech $y \in Y$ będzie takie, że $f(x) = y$ dla pewnego $x \in X$. Takie x jest jedyne na mocy iniektywności, zatem można rozważyć funkcję $g : X \setminus \{x\} \to Y \setminus \{y\}$ daną wzorem $g(a) = f(a)$ dla $a \in X \setminus \{x\}$. Wtedy $|X \setminus \{x\}| = n$ oraz g jest iniekcją. Istotnie, jeżeli x_1, $x_2 \in X \setminus \{x\}$ i $x_1 \neq x_2$, to $f(x_1) \neq f(x_2)$. Zauważmy teraz, że $f(x_1) \neq y \neq f(x_2)$ (ponownie korzystamy z iniektywności), zatem również $g(x_1) \neq g(x_2)$. Tym samym g jest iniekcją, a więc z założenia indukcyjnego jest ona bijekcją. Stąd już łatwo wynika, że f jest bijekcją (dorzucamy po różnym od pozostałych punkcie do dziedziny i przeciwdziedziny).

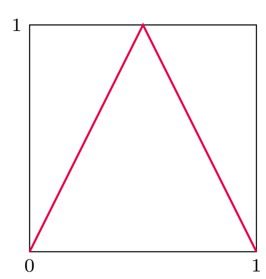
Rozwiązanie problemu wyjściowego polega teraz na zastosowaniu udowodnionego przed chwilą ogólniejszego faktu dla $Y = X$.

Dlaczego tego samego rozumowania nie można poprowadzić w przypadku funkcji $f : X \to X$? Usunięcie jednego elementu z dziedziny i przeciwdziedziny nie gwarantuje, że dziedzina i przeciwdziedzina g będą tym samym zbiorem, a tylko wtedy moglibyśmy skorzystać z założenia indukcyjnego!

Zbiór pusty jest traktowany jako przedział, wobec tego założenie niepustego przedziału ma sens.

Problem 2: Niech $f : [0, 1] \to [0, 1]$ będzie dane wzorem $f(x) = 1 - 2|1/2 - x|$. Niech ponadto A oraz B będą dowolnymi niepustymi przedziałami (otwartymi lub domkniętymi jedno- lub obustronnie), których końce są liczbami niewymiernymi. Uzasadnić, że istnieje takie n, że $f^n(A) \cap B \neq \emptyset$, gdzie f^n oznacza n-krotne złożenie funkcji f.

Wykres funkcji $f(x) = 1 - 2|1/2 - x|$

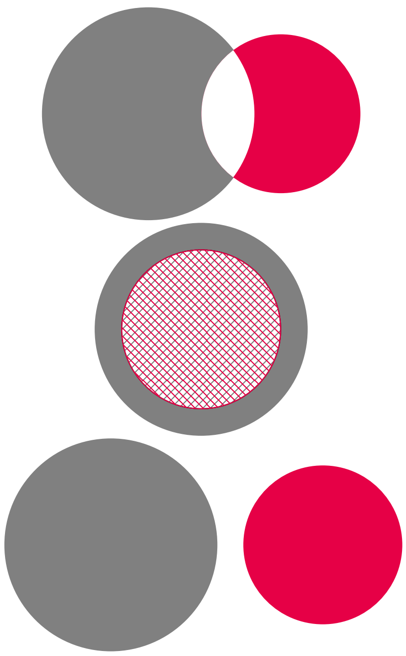


Rozwiązanie: Postawmy ogólniejszy problem. Uzasadnimy, że **dowolny** niepusty przedział otwarty (a, b) ma tę własność, że $f^n((a, b)) = [0, 1]$ dla pewnego $n > 0$. Niech $J = (a, b)$ i $|J|$ będzie długością tego przedziału. Zauważmy, że jeżeli $\frac{1}{2} \notin J$, to $|f(J)|$ jest przedziałem dwukrotnie dłuższym niż $|J|$. Tym samym kolejne przekształcenia J przez f są przedziałami długości $|J|$, $2|J|$, $2^2|J|$, $2^3|J|$ i tak dalej, o ile do żadnego z wymienionych zbiorów nie należy $\frac{1}{2}$. Wobec powyższego istnieje takie $k \geqslant 0$, że $\frac{1}{2} \in f^k(J)$. Ale $f(1/2) = 1$ i $f(1) = 0$, czyli $0 \in f^{k+2}(J)$ i wobec tego $f^{k+2}(J)$ jest przedziałem postaci $K = [0, c)$ dla pewnego $c > 0$. Teraz f ponownie podwaja długość przedziału K, wobec tego dla pewnego $\ell \geqslant 0$ zachodzi $\frac{1}{2} \in f^\ell(K)$. Tym samym $[0, 1/2] \subset f^\ell(K)$ i wystarczy jeszcze zauważyć, że

$$[0,1] = f([0,1/2]) \subset f^{\ell+1}(K) = f^{\ell+1}\left(f^{k+2}(J)\right) = f^{k+\ell+3}(J).$$

Rozwiązanie pierwotnego problemu polega teraz na zauważeniu, że dowolny przedział A postulowany w treści zadania zawiera w sobie przedział otwarty oraz jeśli $f^n(A) = [0,1]$ z przypadku ogólnego, to tym bardziej $f^n(A) \cap B \neq \emptyset$.

Zauważmy, że w ogólniejszym problemie rozważamy wyłącznie jeden przedział, drugi zaś przestał mieć znaczenie (nie użyliśmy także niewymierności końców przedziałów). Tymczasem gdybyśmy próbowali kontrolować oba przedziały jednocześnie, moglibyśmy mieć znacznie więcej problemów z ustaleniem istnienia odpowiedniego n.



Różnica pola szarego i pomarańczowego zbioru we wszystkich powyższych przypadkach jest taka sama!

Problem 3: Koło o promieniu 15 przecina się z kołem o promieniu 20 pod kątem prostym. Wyznaczyć różnicę pól tych części kół, które nie są wspólne dla obu.

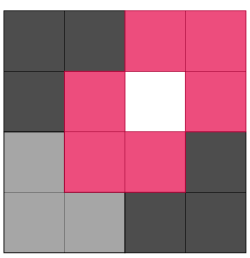
Rozwiązanie: Rozważmy dwie dowolne figury, których część wspólna jest jakimś innym kształtem. Niech pola dwóch kształtów będą odpowiednio równe A oraz B (można założyć, że $A > B$) oraz pole części wspólnej jest równe $X \geqslant 0$. Wtedy szukane pole jest równe

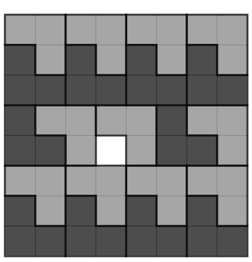
$$(A - X) - (B - X) = A - B.$$

Zatem pole z problemu jest równe

$$(20^2 - 15^2)\pi = 175\pi.$$

Zapewne niejeden mistrz rachunków i geometrii zacząłby to zadanie od wyznaczenia pola części wspólnej. Wszak kąt prosty przecięcia brzmi tak kusząco... Tymczasem wystarczy rozważyć problem ogólny, gdyż kształty figur oraz pole części wspólnej nie odgrywa żadnej roli. Jednocześnie pozbywamy się uciążliwych rachunków i otrzymujemy rozwiązanie problemu z kołami.

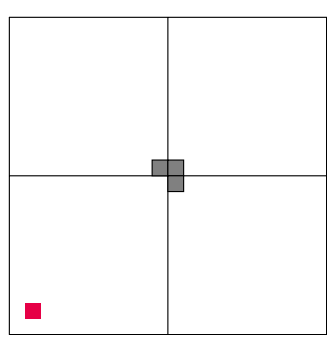


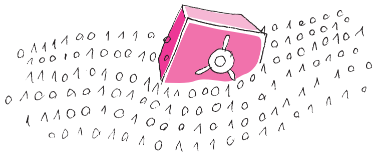


Problem 4: Udowodnić, że dla dowolnej kwadratowej siatki $2^n \times 2^n$ istnieje takie pokrycie płytkami w kształcie litery L, złożonymi z trzech kwadratów, które pozostawia jeden z czterech centralnych kwadratów odkryty (przypadek $n = 2$ oraz $n = 3$ na marginesie).

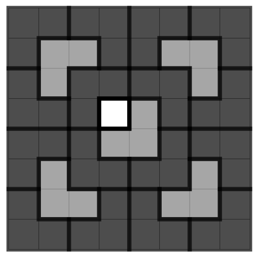
Rozwiązanie: Rysunek dla przypadku $n = 3$ sugeruje pewną metodę wypełniania, ale Czytelnik szybko przekona się, że metody tej nie da się powtórzyć dla $n = 4$. My zaś rozwiążemy problem, dowodząc, że można znaleźć takie pokrycie, dla którego **dowolnie** z góry wybrany kwadrat pozostanie odkryty. Z tego oczywiście natychmiast wynika pozytywne rozwiązanie problemu. Rozumowanie przebiega oczywiście indukcyjnie względem n i przypadek $n = 1$ jest oczywisty.

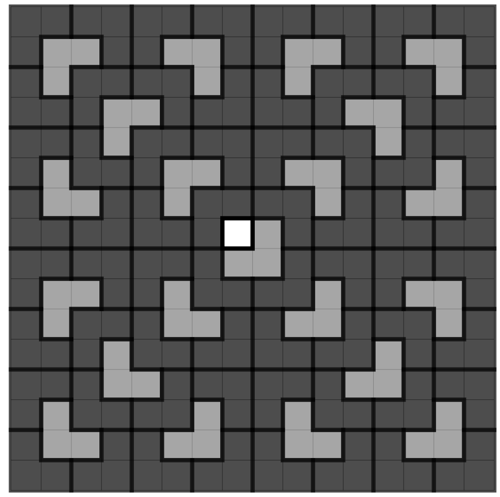
W kroku indukcyjnym ustalmy dowolne $n > 1$ i kwadrat $2^n \times 2^n$ podzielmy na cztery mniejsze kwadraty, jak na rysunku poniżej. Pomarańczowy kwadrat to nasze dowolnie wybrane, ale ustalone pole, którego nie możemy przykryć. W trzech kwadratach z podziału, które nie zawierają wyróżnionego pomarańczowego pola, zaznaczamy te płytki, które są narożnymi polami centralnego bloku 2×2. Korzystamy teraz z indukcji i wypełniamy wszystkie cztery kwadraty płytkami tak, aby nie nakryć pól pomarańczowego i szarych. Następnie szare pola nakrywamy pojedynczą płytką. Dowód jest zakończony.





Rysunki poniżej prezentują odpowiednie wypełnienie metodą indukcji dla przypadków $n = 3$ oraz $n = 4$. Każda szara płytka odpowiada tej wykorzystanej w dowodzie indukcyjnym.





Przedstawione powyżej rozumowanie jest w swojej naturze zbliżone do tego z Problemu 1: bez problemu radzimy sobie z indukcją w sytuacji ogólnej, natomiast przypadek szczególny (niezakryte pole w centrum kwadratu) nas przerasta. Oczywiście moglibyśmy konstruować odpowiednie wypełnienia, jak to zrobiliśmy w przypadkach $n = 2$ oraz $n = 3$, ale jak się przekonaliśmy powyżej, konstrukcja w jednym przypadku nie przenosi się na kolejne.

Zadania

Przygotował Łukasz BOŻYK

M 1648. Na tablicy zapisanych jest 5 (niekoniecznie różnych) liczb rzeczywistych. Dla każdej pary liczb z tablicy na osobnej karteczce zapisano ich sumę. Karteczki pomieszano, a tablicę starto. Czy na podstawie liczb z karteczek można odtworzyć liczby z tablicy?
Rozwiązanie na str. 7

M 1649. Na tablicy zapisanych jest 5 różnych liczb rzeczywistych. Dla każdej pary x, y liczb z tablicy na osobnej karteczce zapisano liczbę $|x - y|$. Czy może się zdarzyć, że na karteczkach zapisano liczby całkowite od 1 do 10?
Rozwiązanie na str. 13

M 1650. Na tablicy zapisanych jest $n \geqslant 3$ różnych liczb rzeczywistych, przy czym n jest liczbą nieparzystą. Dla każdej pary x, y liczb z tablicy na osobnej karteczce zapisano liczbę $|x - y|$. Wykazać, że wszystkie karteczki można podzielić na dwa stosy o równych sumach zapisanych liczb.
Rozwiązanie na str. 7

Przygotował Andrzej MAJHOFER

F 1007. Ciałem szarym nazywane jest nieprzezroczyste ciało, które w całym zakresie widma fal elektromagnetycznych absorbuje ten sam ułamek a energii promieniowania termicznego padającego na jego powierzchnię. Zgodnie z prawem Kirchhoffa takie ciało emituje ułamek a energii promieniowanej przez ciało doskonale czarne o równej mu temperaturze. Współczynnik a nazywany jest w związku z tym względną zdolnością emisyjną.
Płaskie, równoległe powierzchnie dwóch ciał znajdują się w niewielkiej odległości od siebie. Powierzchnia A, o zdolności emisyjnej $a_1 = 0{,}8$, utrzymywana jest w temperaturze $T_1 = 320$ K, a powierzchnia B, o $a_2 = 0{,}9$, w temperaturze $T_2 = 295$ K. Ile wynosi wypadkowy strumień I energii promieniowania termicznego przepływającej między tymi powierzchniami? Stała Stefana–Boltzmanna $\sigma = 5{,}67 \cdot 10^{-8}$ Wm^{-2}K^{-4}. Odległość między powierzchniami jest mała w porównaniu z ich rozmiarami i efekty brzegowe można zaniedbać.
Rozwiązanie na str. 21

F 1008. Zmierzono, że utrzymanie stałej różnicy temperatur między powierzchniami płaskiej płyty miedzianej o grubości $d = 10$ cm wymaga dostarczania strumienia energii (ciepła) w ilości $I = 121$ Wm^{-2}. Ile wynosi utrzymywana różnica temperatur ΔT? Współczynnik przewodnictwa cieplnego miedzi $\lambda = 401$ WK^{-1}m^{-1}. Straty ciepła przez krawędzie boczne płyty pomijamy.
Rozwiązanie na str. 1