Klub 44 M

Termin nadsyłania rozwiązań: 30 XI 2020

Zadania z matematyki nr 805, 806

Redaguje Marcin E. KUCZMA

805. Wewnątrz wypukłego n-kąta $A_1A_2\ldots A_n$ leży taki punkt P, że każdy z trójkątów PA_iA_{i+1} jest równoramienny (przyjmujemy $A_{n+1}=A_1$). Czy stąd wynika, że wielokąt ma okrąg opisany, którego środkiem jest punkt P?

806. Nieskończony ciąg liczb naturalnych (a_n) jest określony wzorami $a_1=2$; $a_{n+1}=2^{a_n}+2$ dla $n\geqslant 1$. Niech $f(x)=x^2-x$. Udowodnić, że dla każdego $n\geqslant 1$ liczba $f(a_{n+1})$ dzieli się przez $f(a_n)$.

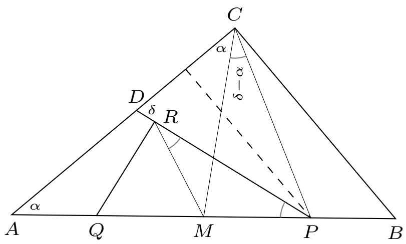
Zadanie 806 zaproponował pan Tomasz Ordowski.

Rozwiązania zadań z numeru 5/2020

Przypominamy treść zadań:

801. Na przyprostokątnej AC trójkąta prostokątnego ABC został dowolnie wybrany punkt D. Symetralna odcinka CD przecina przeciwprostokątną AB w punkcie P. Punkt Q jest symetryczny do P względem środka M odcinka AB. Punkt R jest rzutem prostokątnym punktu Q na prostą DP. Udowodnić, że M leży na dwusiecznej kąta PCR.

802. Niech $x_1, x_2, x_3, \ldots$ będzie rosnącym ciągiem wszystkich dodatnich liczb x spełniających równanie $\operatorname{tg} x = x$. Niech $y_n=\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi - x_n$. Obliczyć granicę ciągu (ny_n) przy $n\to\infty$ (lub wykazać, że granica nie istnieje).



801. Trójkąty AMC i CPD są równoramienne. Przyjmijmy oznaczenia: $|\sphericalangle CAM|=|\sphericalangle ACM|=\alpha$, $|\sphericalangle CDP|=|\sphericalangle DCP|=\delta$; zatem $|\sphericalangle CPD|=180^\circ-2\delta$. Środek odcinka CD leży bliżej punktu C niż punktu A, wobec czego punkt P leży między M i B; w takim razie $|\sphericalangle MCP|=\delta-\alpha$. Rachunek kątów w trójkącie ACP pokazuje, że $|\sphericalangle APR|=\delta-\alpha$.

Ponieważ $QR\perp PR$, trójkąt PMR jest równoramienny, więc $|\sphericalangle MRP|=|\sphericalangle MPR|=\delta-\alpha$. Uzyskujemy równość $|\sphericalangle MCP|=|\sphericalangle MRP|$, z której wynika, że czworokąt $MPCR$ ma okrąg opisany. Skoro $|MP|=|MR|$, punkt M jest środkiem łuku PR tego okręgu; a to znaczy, że półprosta CM połowi kąt PCR. To teza zadania.

802. Dla $x\in(0,\frac{1}{2}\pi)$ zachodzi nierówność $\operatorname{tg} x > x$, więc w tym przedziale nie leży żaden wyraz ciągu (x_n). W każdym dalszym przedziale dodatniości funkcji tangens leży jeden wyraz. Tak więc $n\pi < x_n < \left(n+\frac{1}{2}\right)\pi$. Wobec określenia $y_n=\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi - x_n$ wynika stąd, że $y_n\in(0,\frac{1}{2}\pi)$ oraz

$$\operatorname{tg} y_n = \operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\pi - x_n\right) = \frac{1}{\operatorname{tg} x_n} = \frac{1}{x_n} \longrightarrow 0 \quad \text{gdy} \quad n\to\infty.$$

W takim razie $y_n\to 0$. A skoro $x_n/n\to\pi$ (oraz $\operatorname{tg} z/z\to 1$ gdy $z\to 0$), zatem

$$ny_n = \frac{y_n}{\operatorname{tg} y_n}\cdot n\operatorname{tg} y_n = \frac{y_n}{\operatorname{tg} y_n}\cdot\frac{n}{x_n} \longrightarrow \frac{1}{\pi}.$$

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 795 ($WT=1{,}59$) i 796 ($WT=2{,}34$) z numeru 2/2020

Łukasz Merta	Kraków	44,07
Janusz Fiett	Warszawa	43,82
Błażej Żmija	Kraków	43,66
Michał Adamaszek	Kopenhaga	42,95
Zbigniew Skalik	Wrocław	41,63
Paweł Burdzy	Warszawa	41,58
Franciszek S. Sikorski	Warszawa	41,28
Marek Spychała	Warszawa	40,62
Jakub Węgrecki	Kraków	39,40
Andrzej Kurach	Ryjewo	36,30
Karol Matuszewski	Rawicz	34,08

W matematycznym **Klubie 44** nowa postać: pan Łukasz Merta. Witamy!

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Można je przesyłać również pocztą elektroniczną pod adresem `delta@mimuw.edu.pl` (preferujemy pliki pdf). Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT=4-3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie `deltami.edu.pl`.

Rozwiązanie zadania F 1007. Jeżeli nieprzezroczyste ciało absorbuje część a energii padającej na jego powierzchnię, to z zasady zachowania energii wynika, że pozostały ułamek $r=1-a$ energii jest przez tę powierzchnię odbijany i rozpraszany do otoczenia. Przyjrzyjmy się energii docierającej od ciała A do B. Emitowany przez powierzchnię A strumień energii, równy $\sigma a_1 T_1^4$, w całości dociera do B. Tam jego część a_2 jest przez B absorbowana, a część $r_2=1-a_2$ jest rozpraszana (odbijana) i w całości wraca do A (obie powierzchnie traktujemy jak nieskończone płaszczyzny – zaniedbujemy efekty brzegowe), gdzie jej część a_1 jest absorbowana, a część $r_1=1-a_1$ odbijana itd. Od A do B, w wyniku nieskończonej liczby odbić, dociera więc strumień energii:

$$I_{\mathrm{AB}} = \sigma a_1 a_2 T_1^4 \sum_{n=0}^{\infty} r_1^n r_2^n = \sigma a_1 a_2 T_1^4 \frac{1}{1-r_1 r_2}$$

Analogiczne wyrażenie otrzymamy dla strumienia I_{BA} docierającego od B do A, ale z T_2 w miejscu T_1. Ostatecznie, poszukiwany strumień I energii netto przepływającej między ciałami wynosi

$$I = I_{\mathrm{AB}} - I_{\mathrm{BA}} = \frac{\sigma a_1 a_2 (T_1^4 - T_2^4)}{1-r_1 r_2} = \frac{\sigma (T_1^4 - T_2^4)}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}-1}.$$

Do uzyskania ostatniego wyrażenia skorzystaliśmy z definicji współczynników r_1, r_2. Po podstawieniu danych liczbowych: $I = 121\ \mathrm{Wm}^{-2}$.