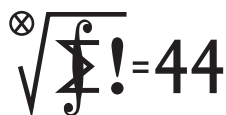


Klub 44 M



Redaguje Marcin E. KUCZMA

Rozwiązania zadań z numeru 4/2020

Przypominamy treść zadań:

799. Czy da się tak uporządkować zbiór wszystkich dodatnich liczb całkowitych, by otrzymać ciąg różnowartościowy, w którym każde dwa sąsiednie wyrazy albo różnią się o 2, albo jeden z nich jest dwukrotnością pozostałego?

800. Dla ustalonych liczb dodatnich a, b określamy funkcję $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ wzorem

$$f(x) = \frac{1}{2} \left(\exp\left(-\frac{a}{x} + 1\right) + \exp\left(-\frac{b}{x} + 1\right) \right).$$

- Uzasadnić, że istnieje dokładnie jedna liczba $L = L(a, b) > 0$, dla której $f(L) = 1$, i że $\min\{a, b\} \leq L(a, b) \leq \max\{a, b\}$; zatem liczba $L(a, b)$ może być uważana za pewną średnią liczb a, b .
- Znaleźć, gdzie ta średnia wpisuje się w ciąg nierówności $H(a, b) \leq G(a, b) \leq A(a, b)$ między średnimi: harmoniczną, geometryczną i arytmetyczną liczb a, b ?

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 793 ($WT = 1,62$) i 794 ($WT = 2,50$) z numeru 1/2020

Janusz Fielt	Warszawa	43,82
Franciszek S. Sikorski	Warszawa	41,28
Łukasz Merta	Kraków	40,14
Zbigniew Skalik	Wrocław	40,04
Błażej Żmija	Kraków	39,73
Michał Adamaszek	Kopenhaga	39,02
Paweł Burdzy	Warszawa	38,82
Jakub Węgrecki	Kraków	37,06
Marek Spychała	Warszawa	36,69
Andrzej Kurach	Ryjewo	36,30

Widać, że w bliskim czasie czeka nas ogromny wysyp czterdziestczwórek.

799. Jest to możliwe. Przedstawimy jedną z możliwych konstrukcji.

Niech a będzie dowolną dodatnią liczbą nieparzystą. Spójrzmy na ciąg

$$a \rightarrow 2a \implies a + 1 \rightarrow 2a + 2 \rightarrow 2a + 4 \rightarrow a + 2 \implies 2a + 5,$$

w którym pojedyncza strzałka oznacza jedną z dopuszczalnych operacji $(x + 2, x - 2, x \cdot 2, x/2)$, zaś podwójna strzałka (\implies) oznacza wielokrotne dodanie lub odjęcie dwójki, przebiegające monotonicznie przez wszystkie liczby tej samej parzystości, co liczby połączone tą podwójną strzałką. Na przykład dla $a = 7$ mamy ciąg

$$7 \rightarrow \underbrace{14 \rightarrow 12 \rightarrow 10 \rightarrow 8}_{\implies} \rightarrow 16 \rightarrow 18 \rightarrow \underbrace{9 \rightarrow 11 \rightarrow 13 \rightarrow 15 \rightarrow 17 \rightarrow 19}_{\implies}$$

(jedynie dla $a = 1$ strzałka $2a \implies a + 1$, czyli $2 \implies 2$ jest „pusta”). W tak określonym ciągu występują wszystkie liczby naturalne z przedziału $[a, 2a + 5]$, każda jednorazowo.

Wystarczy teraz określić liczby a_1, a_2, a_3, \dots wzorem rekurencyjnym $a_1 = 1, a_{n+1} = 2a_n + 5$ i zastosować podaną konstrukcję w każdym z przedziałów $[a_n, a_{n+1}]$.

800. Funkcja f jest ciągła i rosnąca, a jej granice przy końcach dziedziny $(0, \infty)$ wynoszą 0 oraz e . Zatem liczba $L = L(a, b)$, dla której $f(L) = 1$, jest jednoznacznie określona. Wykażemy, że $H \leq L \leq G$ (gdzie $H = \frac{2ab}{a+b}, G = \sqrt{ab}$); stąd też wyniknie, że L leży pomiędzy a i b . Wobec ściślej monotoniczności funkcji f wystarczy dowieść, że $f(H) \leq 1 \leq f(G)$.

Niech $g(x) = e^{-1/x}$ dla $x > 0$; jest to funkcja rosnąca. Skoro $H = \frac{2ab}{a+b}$, zatem

(1) $f(H) = \frac{e}{2} (g(u) + g(v))$, gdzie $u = \frac{2a}{a+b}, v = \frac{2b}{a+b}$; $u + v = 2$. Badając znak $g''(x)$, stwierdzamy, że funkcja g jest wklęsła w przedziale $[\frac{1}{2}, \infty)$. Jeżeli więc liczby u, v leżą w tym przedziale, to $g(u) + g(v) \leq 2g(\frac{u+v}{2}) = 2/e$. Jeśli zaś np. $u < \frac{1}{2}$, rozważamy dwa podprzypadki (pamiętając, że $v = 2 - u$):

gdy $\frac{1}{3} \leq u < \frac{1}{2}$: $g(u) + g(v) < g(\frac{1}{2}) + g(\frac{5}{3}) = e^{-2} + e^{-3/5}$;
 gdy $0 < u < \frac{1}{3}$: $g(u) + g(v) < g(\frac{1}{3}) + g(2) = e^{-3} + e^{-1/2}$;

w wszystkich przypadkach uzyskane wartości nie przekraczają $2/e$. Otrzymane oszacowanie $g(u) + g(v) \leq 2/e$ pokazuje (zgodnie ze wzorem (1)), że $f(H) \leq 1$.

Pozostało do wykazania, że $f(G) \geq 1$; do tego użyjemy funkcji $h(x) = e^{-x} + e^{-1/x}$, bowiem

$$(2) \quad f(G) = f(\sqrt{ab}) = \frac{e}{2} \cdot h\left(\sqrt{\frac{a}{b}}\right).$$

Nietrudno się przekonać, że dla $x > 1$ zachodzi nierówność $h'(x) > 0$, czyli $e^{-1/x} > x^2 e^{-x}$, równoważna (przez logarytmowanie) nierówności $-1/x > 2 \ln x - x$; tę ostatnią nierówność sprawdzamy bez trudu, przenosząc wszystko na jedną stronę i ponownie różniczkując. Zatem istotnie $h'(x) > 0$ dla $x > 1$; stąd $h(x) \geq h(1) = 2/e$ dla $x \geq 1$. Ponieważ bez straty ogólności można przyjąć, że $a \geq b$, ze wzoru (2) wnosimy, że $f(G) \geq 1$. To kończy rozwiązanie.

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n + 2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n + 4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Można je przysyłać również pocztą elektroniczną pod adresem delta@mimuw.edu.pl (preferujemy pliki pdf). Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez

współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N - liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) - i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu 44 punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo - to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie deltami.edu.pl.