KĄCIK POCZĄTKUJĄCEGO OLIMPIJCZYKA 20

Nic nie może przecież wiecznie trwać

Bartłomiej BZDĘGA

W ósmym kąciku pisałem o niezmiennikach, czyli o tych własnościach obiektów, które zostają zachowane po poddaniu ich wybranym przekształceniom. Teraz pora na *półniezmienniki*, które są bliskimi krewniakami niezmienników – ale w odróżnieniu od nich mogą (a czasem nawet muszą) się zmieniać, jednak zmiana ta jest w jakiś sposób kontrolowana.

Zajmiemy się tu takimi półniezmiennikami, które robią coś zupełnie innego niż niezmienniki – są narzędziami w dowodzeniu, że z danego obiektu, przy użyciu wybranych przekształceń, jest możliwe – lub wręcz nieuniknione – osiągnięcie obiektu o pożądanej własności.

Następujący przykład powinien to rozjaśnić. *Na płaszczyźnie narysowano n odcinków, których końce są różne i żadne trzy końce nie leżą na jednej prostej. Ruch polega na wybraniu dwóch przecinających się odcinków – powiedzmy AB i CD – i zastąpieniu ich odcinkami AC i BD. Wykazać, że nieuniknione jest osiągnięcie stanu, w którym żadne dwa z tych odcinków się nie przecinają.*
Z każdym ruchem maleje suma długości narysowanych odcinków (to jest poszukiwany półniezmiennik), która może przyjąć jedynie skończenie wiele różnych wartości. Z tego wynika, że w pewnym momencie nie będzie już można wykonać ruchu – a to świadczy o tym, że żadne odcinki się nie przecinają.

W zadaniach 1, 2, 5 i 6 stosujemy podobne rozumowanie, by wykazać nieuniknioność końca niezależnie od tego, które z dostępnych przekształceń w danym momencie wybrano. W pozostałych zadaniach musimy sterować przekształceniami w odpowiedni sposób.

Zadania

1. Na okręgu znajduje się $n \geqslant 2$ punktów czarnych i n białych. Rysujemy n cięciw, z których każda ma jeden koniec biały a drugi czarny. Udowodnić, że można zrobić to tak, by każde dwie narysowane cięciwy przecinały się.
2. Z n^2 płytek w kształcie trójkąta równobocznego o boku 1 ułożono trójkąt równoboczny o boku n. Każda płytka jest z jednej strony czerwona, a z drugiej niebieska. Ruch polega na wykonaniu następujących czynności: wybieramy płytkę P mającą wspólne boki z co najmniej dwiema płytkami, których widoczne strony mają kolor inny niż widoczna strona płytki P. Następnie odwracamy płytkę P na drugą stronę. Czy ta zabawa może trwać bez końca?
3. W każdym polu tabeli $m \times n$ wpisano pewną liczbę rzeczywistą. W danej chwili możemy wybrać jedną kolumnę lub wiersz tej tabeli i zmienić znaki występujących w nim liczb na przeciwne. Wykazać, że stosując takie operacje, można doprowadzić do tego, by suma liczb w każdym wierszu i w każdej kolumnie była nieujemna.
4. Dana jest pewna skończona rodzina zbiorów skończonych, niekoniecznie rozłącznych. Każdy element każdego ze zbiorów tej rodziny jest czerwony lub niebieski. Ruch polega na wybraniu jednego ze zbiorów i zamianie koloru – czerwonego na niebieski, a niebieskiego na czerwony – wszystkich jego elementów. Udowodnić, że w skończonej liczbie ruchów można doprowadzić do tego, by każdy zbiór w tej rodzinie miał co najmniej tyle elementów niebieskich co czerwonych.
5. W szeregu stoi n żołnierzy. Na komendę *Na lewo patrz!* część z nich odwraca się w lewo, a część w prawo. Następnie co sekundę wszyscy żołnierze, którzy stoją obok siebie i są zwróceni do siebie twarzami, obracają się o $180°$. Wykazać, że po pewnym czasie żołnierze przestaną się obracać.
6. Mamy dany wielokąt wklęsły. Ruch polega na wyborze przekątnej AB leżącej na zewnątrz tego wielokąta, przy czym cały wielokąt poza punktami A i B musi leżeć po jednej stronie prostej AB. Następnie jedną z łamanych, na które punkty A i B dzielą brzeg wielokąta, odbijamy środkowosymetrycznie względem środka odcinka AB, otrzymując nowy wielokąt. Dowieść, że po pewnej, skończonej liczbie takich operacji, otrzymamy wielokąt wypukły.
7. Na tablicy napisano trzy nieujemne liczby całkowite. Wybieramy z tej trójki dwie liczby k, m i zastępujemy je liczbami $k+m$ i $|k-m|$, a trzecia liczba pozostaje bez zmiany. Z otrzymaną trójką postępujemy tak samo. Rozstrzygnąć, czy z każdej początkowej trójki liczb całkowitych nieujemnych można w ten sposób otrzymać trójkę, w której co najmniej dwie liczby są zerami.

Wskazówki do zadań

1. Narysować n cięciw „byle jak” i zastosować rozumowanie podobne do tego, które przedstawiono we wstępie.

2. Przeanalizować liczbę jednostkowych odcinków, które oddzielają płytki o różnych kolorach na wierzchnich stronach.

3. Gdy wykonamy operację na wierszu lub kolumnie o ujemnej sumie, to wzrośnie suma wszystkich mn liczb, a ta może przyjąć jedynie skończenie wiele wartości.

4. Wykonując ruch na zbiorze o mniejszej liczbie elementów niebieskich niż czerwonych, zwiększymy ogólną liczbę niebieskich elementów.

5. Zamiast odwracać się, niech żołnierze zwróceni do siebie twarzami wykonują krok w przód, tak by się zamienić miejscami. Każdy żołnierz może wykonać tylko skończenie wiele takich kroków.

6. Jest jasne, że pole wielokąta wzrasta po każdym ruchu. Wystarczy wykazać, że przyjmuje ono tylko skończenie wiele wartości. W tym celu dla wielokąta $A_1A_2\ldots A_n$ rozważmy wektory $\overrightarrow{v_1}=\overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{v_2}=\overrightarrow{A_2A_3}, \ldots, \overrightarrow{v_n}=\overrightarrow{A_nA_1}$. Wykonanie ruchu zmienia jedynie kolejność wektorów $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \ldots, \overrightarrow{v_n}$, a ta jednoznacznie określa pole wielokąta.

7. Trójkę (A,B,C) zapiszemy w postaci $(2^\alpha a, 2^\beta b, 2^\gamma c)$, w której α, β i γ są całkowite nieujemne, zaś a, b i c są nieparzyste lub równe 0. Jeśli w tej trójce jest najwyżej jedno zero, to stosując operacje z zadania, można doprowadzić do trójki $(2^{\alpha'} a', 2^{\beta'} b', 2^{\gamma'} c')$, w której $a'+b'+c' < a+b+c$.
W tym celu przydatne są równości $x+y-|x-y| = 2\min\{x,y\}$ i $x+y+|x-y| = 2\max\{x,y\}$, dzięki którym z trójki (A,B,C) otrzymamy trójkę $(2A,2B,C)$.