Klub 44 M

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 791 ($WT = 1{,}75$) i 792 ($WT = 1{,}73$) z numeru 12/2019

Mikołaj Pater	Opole	46,59
Janusz Fiett	Warszawa	43,82
Franciszek S.Sikorski	Warszawa	41,28
Paweł Burdzy	Warszawa	38,82
Zbigniew Skalik	Wrocław	37,54
Łukasz Merta	Kraków	36,02
Błażej Żmija	Kraków	35,77
Jakub Węgrecki	Kraków	35,44
Marek Spychała	Warszawa	35,07
Michał Adamaszek	Kopenhaga	34,90
Andrzej Kurach	Ryjewo	34,68

Pan Mikołaj Pater: witamy w **Klubie 44M** !

Redaguje Marcin E. KUCZMA

Rozwiązania zadań z numeru 3/2020

Przypominamy treść zadań:

797. W trójkącie ABC wysokość poprowadzona z wierzchołka C ma długość h. Punkty M i N to (odpowiednio) środki boków AC i BC. Okrąg przechodzący przez punkty B i N, styczny do prostej BM, przecina prostą AB ponownie w punkcie P. Wyznaczyć największą liczbę λ, dla której (przy każdej takiej konfiguracji) odcinek AP ma długość nie mniejszą niż λh.

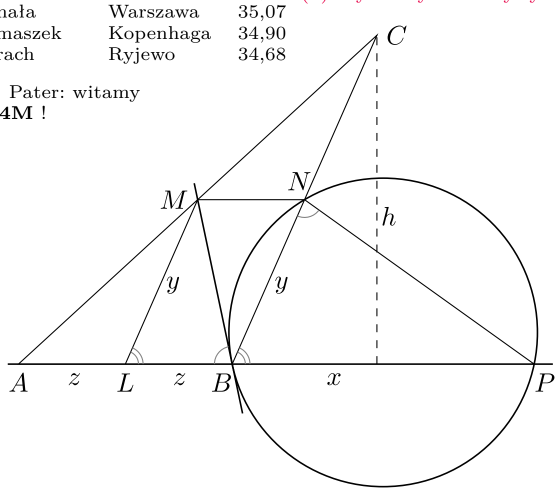
798. W nieograniczonym trójkątnym diagramie

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 1 & & & \\ & & 1 & 1 & 1 & & \\ & 1 & 2 & 3 & 2 & 1 & \\ 1 & 3 & 6 & 7 & 6 & 3 & 1 \\ \dots & & & & & & \dots \end{array}$$

w górnym wierszu jest pojedyncza jedynka; a dalej każdy element jest sumą trzech liczb znajdujących się nad nim w poprzednim wierszu (↘, ↓, ↙). Wiersze są numerowane od zera; zatem w n-tym wierszu jest $2n+1$ liczb dodatnich.

(a) Wykazać, że w każdym wierszu, poza zerowym i pierwszym, jest jakaś liczba parzysta.

(b) Wyznaczyć numery tych wierszy, w których są dokładnie trzy liczby nieparzyste.



797. Niech L będzie środkiem boku AB. W okręgu (PBN) kąt wpisany oparty na cięciwie BP przystaje do kąta między tą cięciwą a styczną w punkcie B: $|\sphericalangle BNP| = |\sphericalangle LBM|$. W połączeniu z oczywistą równością $|\sphericalangle PBN| = |\sphericalangle MLB|$ daje to podobieństwo trójkątów PBN i MLB, więc i proporcję $|PB| : |BN| = |ML| : |LB|$. Przy oznaczeniach $x = |BP|$, $y = |BN| = |LM|$, $z = |AL| = |LB|$ uzyskana proporcja pokazuje, że $x = y^2/z$. Oznaczając dalej $|\sphericalangle ABC| = \beta$, dostajemy ciąg zależności

$$\frac{|AP|}{h} = \frac{2z+x}{h} = \frac{2z + (y^2/z)}{2y\sin\beta} \geqslant \frac{2\sqrt{2}\,y}{2y\sin\beta} \geqslant \sqrt{2}.$$

W tym szacowaniu równość zostaje osiągnięta, gdy $y/z = \sqrt{2}$ oraz $\beta = 90°$. Nierówność $|AP| \geqslant \lambda h$ zachodzi więc dla wartości $\lambda = \sqrt{2}$, której powiększyć już nie można.

798. W każdym wierszu środkowy wyraz jest liczbą nieparzystą (oczywista indukcja); wraz ze skrajnymi jedynkami daje to już trzy liczby nieparzyste w wierszu. Dla kontroli parzystości pozostałych elementów użyjemy modelu algebraicznego. Traktujemy wyrazy n-tego wiersza jako kolejne współczynniki wielomianu stopnia $2n$. Mnożąc ów wielomian przez trójmian $1 + x + x^2$, otrzymujemy wielomian stopnia $2n+2$, którego kolejnymi współczynnikami są wyrazy następnego wiersza tabeli – bo taka jest zasada generowania kolejnych wierszy. Stąd wniosek, że wyrazy n-tego wiersza to kolejne współczynniki wielomianu $F_n(x) = \left(1 + x + x^2\right)^n$, zapisanego w postaci rozwiniętej.

Zauważmy, że jeśli $n = 2^k$, to wyrazy n-tego wiersza, poza wspomnianymi trzema, są liczbami parzystymi. Uzasadnienie indukcyjne: tak jest dla $k = 0$; i jeśli tak jest dla k, to podnosząc wielomian F_{2^k} do kwadratu dostajemy wielomian $F_{2^{k+1}}$, utworzony przez kwadraty składników wielomianu F_{2^k} (ich współczynniki nie zmieniają parzystości) plus liczne podwojone iloczyny, dające współczynniki parzyste.

Ustalmy teraz liczby całkowite $k \geqslant 1$ oraz m, przy czym $0 < m < 2^k$. Wykażemy, że w wierszu o numerze $2^k + m$ na pozycji m znajduje się liczba nieparzysta, zaś na pozycji $2^{k-1} + m$ liczba parzysta.

Zapiszmy wielomiany w postaci rozwiniętej:

$$F_m(x) = a_0 + \ldots + a_{2m}x^{2m},$$

$$F_{2^k}(x) = b_0 + \ldots + b_{2^{k+1}}x^{2^{k+1}},$$

$$F_{2^k+m}(x) = c_0 + \ldots + c_m x^m + \ldots + c_{2(2^k+m)}x^{2(2^k+m)}.$$

Współczynnik c_m wyraża się wzorem

$$c_m = \sum_{i+j=m} a_i b_j =$$

$$= (a_0 b_m + a_1 b_{m-1} + \ldots + a_{m-1} b_1) + a_m b_0.$$

Wszystkie liczby b_j w nawiasie są parzyste (jako współczynniki wielomianu F_{2^k} z pozycji nie skrajnych ani nie środkowej); liczba a_m jest nieparzysta (środkowy wyraz F_{2^k}). Zatem liczba c_m jest nieparzysta.

Na pozycji $2^{k-1} + m$ widzimy w wielomianie F_{2^k+m} współczynnik

$$c_{2^{k-1}+m} = \sum_{i+j=2^{k-1}+m} a_i b_j;$$

tutaj nieparzyste czynniki b_j mamy tylko dla $j = 0$ oraz $j = 2^k$ (środkowy wyraz w F_{2^k}); towarzyszą im czynniki $a_{2^{k-1}+m}$ oraz $a_{m-2^{k-1}}$. Te dwie liczby są położone w wierszu m symetrycznie względem wyrazu środkowego a_m, więc są równe.

Z wykazanych własności wynika zarówno teza (**a**) (którą zresztą można uzyskać wieloma innymi metodami), jak i odpowiedź na pytanie (**b**): dokładnie trzy liczby nieparzyste są tylko w wierszach o numerach $n = 2^k$, $k \geqslant 0$ (bowiem gdy n nie jest potęgą dwójki, $n = 2^k + m$, $0 < m < 2^k$, znaleziona liczba nieparzysta c_m leży w wierszu n na pozycji m, więc nie na skraju ani nie na środku).