Klub 44 M

Termin nadsyłania rozwiązań: 31 VIII 2020

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 789 ($WT = 1{,}93$) i 790 ($WT = 2{,}68$) z numeru 11/2019

Mikołaj Pater	Opole	43,11
Janusz Fiett	Warszawa	42,09
Franciszek S. Sikorski	Warszawa	41,28
Zbigniew Skalik	Wrocław	35,79
Paweł Burdzy	Warszawa	35,34
Jakub Węgrecki	Kraków	33,71
Marek Spychała	Warszawa	33,34
Łukasz Merta	Kraków	32,54
Błażej Żmija	Kraków	32,29

W rocznym omówieniu sezonu ligowego (Δ^2_{20}), w opublikowanej rozszerzonej czołówce („Lista uczestników...") zostało omyłkowo pominięte nazwisko Karol Matuszewski ze stanem konta 15,79 (po zadaniach z Δ^6_{19}). Za niedopatrzenie przepraszamy.

Zadania z matematyki nr 803, 804

Redaguje Marcin E. KUCZMA

803. Dane są liczby rzeczywiste $a > b > 0$. Udowodnić, że zbiór liczb rzeczywistych x spełniających równanie $\lfloor ax + b\rfloor = \lfloor bx + a\rfloor$ zawiera pewien przedział długości $1/a$. Pokazać też, że dla dowolnej liczby $b > 0$ można znaleźć liczbę $a > b$ tak, by rozważany zbiór zawierał przedział długości większej niż $1/a$.

804. Niech p będzie liczbą pierwszą; $p > 2$. Dla liczby całkowitej r niech A_r oznacza zbiór takich permutacji $(x_1, \ldots, x_p)$ zbioru wszystkich reszt (mod p), że

$$x_1 + 2x_2 + \ldots + px_p \equiv r \pmod{p}.$$

Dowieść, że jeśli $0 < r < s < p$, to zbiory A_r i A_s są równoliczne.

Zadanie 804 zaproponował pan Semen Słobodianiuk

Rozwiązania zadań z numeru 2/2020

Przypominamy treść zadań:

795. Ciąg $x_0, x_1, x_2, \ldots$ jest określony rekurencyjnie: $x_0 = 1$, $x_1 = 1/\sqrt{2}$,

$$x_{n+1} = x_n\sqrt{\frac{x_{n-1} + x_n}{2x_{n-1}}} \quad \text{dla } n = 1, 2, 3, \ldots$$

Uzasadnić zbieżność i wyznaczyć granicę tego ciągu.

796. Dane są liczby całkowite $m > n > 1$, przy czym m jest liczbą parzystą. Udowodnić, że równanie

$$x^m + y^m = (x + y)^n$$

ma rozwiązanie w liczbach całkowitych dodatnich x, y wtedy i tylko wtedy, gdy $n - 1$ dzieli się przez $m - n$.

795. Z definicji ciągu (x_n) wynika (przez oczywistą indukcję), że wszystkie jego wyrazy są dobrze określonymi liczbami dodatnimi. Weźmy pod uwagę ilorazy $t_n = x_n/x_{n-1}$; ciąg liczb dodatnich $t_1, t_2, t_3, \ldots$ z wyrazem początkowym $t_1 = 1/\sqrt{2}$ spełnia zależność rekurencyjną

$$(1) \qquad t_{n+1} = \sqrt{\frac{1 + t_n}{2}} \qquad \text{dla } n = 1, 2, 3, \ldots$$

Pokażemy, że dla $n = 1, 2, 3, \ldots$ zachodzi równość

$$(2) \qquad t_n = \cos\alpha_n, \qquad \text{gdzie } \alpha_n = \frac{\pi}{2^{n+1}}\,.$$

Uzasadnienie indukcyjne: dla $n = 1$ tak jest. Przyjmijmy równość $t_n = \cos\alpha_n$ dla pewnego $n \geqslant 1$. Ponieważ $\alpha_n = 2\alpha_{n+1}$, mamy wówczas

$$t_n = \cos(2\alpha_{n+1}) = 2(\cos\alpha_{n+1})^2 - 1;$$

stąd (wobec spostrzeżenia, że $\cos\alpha_{n+1} > 0$):

$$\cos\alpha_{n+1} = \sqrt{\frac{1 + t_n}{2}}\,.$$

W połączeniu ze wzorem (1) daje to równość (2) z n zastąpionym przez $n{+}1$, czyli tezę indukcyjną.

Wzór (2) został wykazany. Wywnioskujemy z niego, że

$$(3) \qquad x_n = \frac{1}{2^n \sin\alpha_n}$$

dla $n = 1, 2, 3, \ldots$ Znów indukcja: dla $n = 1$ zgadza się (bo $\alpha_1 = \pi/4$). Ustalmy $n \geqslant 2$ i przyjmijmy słuszność (3) z n zastąpionym przez $n{-}1$. Z takiego założenia indukcyjnego i ze wzoru (2) otrzymujemy

$$x_n = t_n x_{n-1} = (\cos\alpha_n)\cdot\frac{1}{2^{n-1}\sin\alpha_{n-1}} = \frac{\cos\alpha_n}{2^{n-1}\sin(2\alpha_n)} = \frac{1}{2^n\sin\alpha_n}\,,$$

co kończy indukcyjny dowód wzoru (3). Tak więc

$$\frac{1}{x_n} = 2^n\sin\alpha_n = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{2^{n+1}}{\pi}\cdot\sin\frac{\pi}{2^{n+1}} \longrightarrow \frac{\pi}{2}, \qquad \text{gdy } n \to \infty$$

(bo $(\sin x)/x \to 1$ przy $x \to 0$). Stąd, ostatecznie, $x_n \to 2/\pi$.

796. Załóżmy, że dodatnie liczby całkowite x, y spełniają podane równanie. Oznaczmy przez d ich największy wspólny dzielnik; tak więc $x = ud$, $y = vd$, gdzie u, v to liczby naturalne względnie pierwsze. Wstawiając to do równania i dzieląc stronami przez d^n, otrzymujemy

$$(4) \qquad d^{m-n}(u^m + v^m) = (u + v)^n.$$

Niech p będzie dowolnym dzielnikiem pierwszym liczby $u^m + v^m$. Wobec związku (4) p jest też dzielnikiem sumy $u + v$. To znaczy, że $u \equiv -v \pmod{p}$; a skoro m jest liczbą parzystą, mamy stąd $u^m \equiv v^m \pmod{p}$, i dalej

$$2u^m \equiv u^m + v^m \equiv 0 \pmod{p}.$$

Liczba u nie dzieli się przez p (bo $p \mid u + v$, zaś u, v są względnie pierwsze); zatem $p = 2$.

Skoro $u^m + v^m$ nie ma innych dzielników pierwszych, znaczy to, że

$$(5) \qquad u^m + v^m = 2^l \qquad \text{dla pewnego } l \in \mathbb{N}.$$

Zatem liczby u i v (względnie pierwsze) są obie nieparzyste; stąd $u^m \equiv v^m \equiv 1 \pmod{4}$, bo m jest liczbą parzystą. W równości (5) mamy więc $l = 1$, skąd $u = v = 1$. Wracamy do równania (4): $d^{m-n}\cdot 2 = 2^n$. To pokazuje, że $d = 2^k$ (dla pewnego $k \in \mathbb{N}$); przy tym $2^{k(m-n)}\cdot 2 = 2^n$, czyli $k(m - n) = n - 1$: liczba $n - 1$ dzieli się przez $m - n$.

Na odwrót, załóżmy, że $n - 1 = k(m - n)$ dla pewnego k. Wówczas para $x = y = 2^k$ jest rozwiązaniem zadanego równania:

$$x^m + y^m = 2\cdot 2^{km} = 2\cdot 2^{kn+n-1} = 2^{n(k+1)} = (x + y)^n.$$

Uzyskaliśmy żądaną równoważność.